Sprawdzian 4
22 maja 2010

Zadanie 1 *Zbadaj które z macierzy*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix},$$

są kongruentne nad:
i) $\mathbb{Q}$, *ii)* $\mathbb{R}$, *iii)* $\mathbb{C}$.

Zadanie 2 *Niech M będzie macierzą przekształcenia euklidesowego f przestrzeni E^3 w bazie standardowej.*

a) Udowodnij, że f jest symetrią wtedy i tylko wtedy gdy M jest macierzą symetryczną.

b) Udowodnij, że f jest obrotem wtedy i tylko wtedy gdy $\det M = 1$.

c) Jakie własności ma f gdy $\det M = 1$ i $M = M^T$.

Zadanie 3 *Niech $l = [0,3,0,1] + lin\ \{(2,0,0,1)\}$ i $\pi = af\{[3,1,0,0],[3,2,0,-1],[3,0,1,1]\}$ będą podprzestrzeniami przestrzeni $E(R^4)$.*

a) Znajdź odległość między prostą l a płaszczyzną π.

b) Opisz obraz l w symetrii S względem płaszczyzny π.

c) Oblicz macierz symetrii S względem płaszczyzny π, w standardowym układzie bazowym i napisz wzór analityczny.

Zadanie 4 *Niech* $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Niech $\xi : \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}$ będzie określone macierzą A.

a) Sprawdź czy ξ jest iloczynem skalarnym.

Niech $f : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ będzie określone macierzą A.

b) Znajdź bazę ortonormalną względem standardowego iloczynu skalarnego przestrzeni $\mathbb{E}^3$ złożoną z wektorów własnych f.

c) Znajdź bazę ortogonalną i półunormowaną względem funkcjonału ξ przestrzeni $\mathbb{E}^3$ złożoną z wektorów własnych f.

Zadanie 5 *Niech $\alpha, \beta \in R^3$ będą takimi wektorami, że $\|\alpha\| = 1$, $\|\beta\| = 2$ i cosinus kąta między nimi wynosi $\frac{\sqrt{3}}{2}$.*

a) Oblicz długość wektora $(2\alpha - 3\beta) \times (3\alpha - 4\beta)$.

b) Zbadaj czy podane warunki są wystarczające by ciąg $(\alpha\ ,\ \alpha \times \beta\ ,\ (\beta \times \alpha) \times \alpha)$ był bazę ortonormalną przestrzeni E^3.