Sprawdzian 4

21 maja 2009

Zadanie 1 *Niech* $\alpha_1 = (-1, 1, 2, 0)$, $\alpha_2 = (0, -1, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$
zaś $f_3 = x_1 + x_2 + x_4$ *i* $f_4 = 2x_1 + x_3$.
Podać przykład takich wektorów α_3 *i* $\alpha_4 \in \mathbb{R}^4$ *oraz funkcjonałów* f_1 *i* $f_2 \in \mathbb{R}^{4*}$ *takich, że* $\forall_{1 \leq i \leq 4}\ \alpha_i^* = f_i$.

Zadanie 2 *Niech* $\varphi \in L(\mathbb{R}^3; \mathbb{R}^4)$ *będzie określone wzorem:*
$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3\, , x_2 + x_3\, , x_1 - x_2\, , x_1 + x_2 + 2x_3)$.
Opisz jądro przekształcenia $\varphi^* \in L\left(\mathbb{R}^{4*}; \mathbb{R}^{3*}\right)$.

Zadanie 3 *Niech* $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3\, ; 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0\}$.

a) Znajdź bazę ortonormalną przestrzeni V.

b) Znajdź wzór na przekształcenie $f : R^3 \longrightarrow R^3$ *będące symetrią względem* V *i macierz* f *w bazie standardowej.*

Zadanie 4 *Niech* $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \\ -1 & 5 & 15 \end{bmatrix}$ *będzie macierzą funkcjonału dwuliniowego* f *w bazie standardowej.*

Uzasadnij, że f *jest iloczynem skalarnym i znajdź bazę w której macierzą* f *jest macierz jednostkowa.*

Zadanie 5 *Niech* $\alpha = (1, 2, 1)$, $\beta = (1, 3, 1) \in R^3$.

a) Udowodnij że wektory α, $\alpha \times \beta$, $\alpha \times (\alpha \times \beta)$ *są liniowo niezależne.*

b) Przedstaw wektor $(2, -1, 0)$ *jako kombinację liniową wektorów* α, $\alpha \times \beta$ *i* $(\beta \times \alpha) \times \alpha$.