

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce.

Na każdej kartce: imię i nazwisko osoby zdającej, numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej, numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

1. W przestrzeni \mathbf{R}^3 dana jest płaszczyzna $M : x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4$ oraz prosta $L = \text{af}((2, -2, 5), (1, 0, 2))$.
 - a) Znaleźć układ równań liniowych opisujący prostą L .
 - b) Niech K będzie prostą przechodzącą przez punkt $p = (1, 1, 1)$, przecinającą prostą L i równoległą do płaszczyzny M . Znaleźć parametryzację prostej K .

2. W $(\mathbf{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{st}})$ dane są proste $L_1 = (2, 1, 1) + \text{lin}((1, 1, -1))$ oraz $L_2 = (-1, 1, 1) + \text{lin}((1, 2, 0))$.
 - a) Znaleźć rzut prostopadły punktu $p = (0, 3, 1)$ na prostą L_1 .
 - b) Dla jakich punktów $p \in L_1, q \in L_2$ ich odległość $\rho(p, q)$ jest najmniejsza?

3. W $(\mathbf{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\text{st}})$ rozpatrzmy punkty $p_1 = (2, 1, 1), p_2 = (2, 2, 1), p_3 = (2, 1, 2)$ oraz $q_1 = (1, 2, 1), q_2 = (1, 4, 1), q_3 = (1, 2, 3)$.
 - a) Czy istnieje izometria $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ taka, że $f(p_i) = q_i$ dla $i = 1, 2, 3$? Odpowiedź uzasadnić.
 - b) Opisać (podając wartości na wybranej bazie punktowej przestrzeni $\text{af}(p_1, p_2, p_3)$) wszystkie izometrie $g : \text{af}(p_1, p_2, p_3) \rightarrow \text{af}(q_1, q_2, q_3)$ takie, że $g(\text{af}(p_1, p_2)) = \text{af}(q_1, q_2), g(\text{af}(p_1, p_3)) = \text{af}(q_1, q_3)$.

4. Niech $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ będzie n -wymiarową przestrzenią euklidesową liniową i niech $\varphi : V \rightarrow V$ będzie przekształceniem liniowym.
 - a) Wykazać, że φ zachowuje iloczyn skalarny wtedy i tylko wtedy, gdy φ zachowuje długość wektorów.
 - b) Wykazać, że jeśli φ jest różnowartościowe, to dla każdego n -wymiarowego równoległościanu R zachodzi równość $\mu_n(\varphi(R)) = |\det(\varphi)| \cdot \mu_n(R)$, gdzie μ_n oznacza n -wymiarową miarę.

5. Niech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie iloczynem skalarnym na przestrzeni liniowej V i niech W_1, W_2 będą podprzestrzeniami przestrzeni V .
 - a) Wykazać, że $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$.
 - b) Wykazać, że jeśli V jest skończenie wymiarowa, to $W_1^\perp + W_2^\perp = (W_1 \cap W_2)^\perp$.
 - c) Podać przykład, że założenie skończonego wymiaru w b) jest istotne.