GAL, Kolokwium 4 TEMAT A 13.05.2011

Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach).
Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. W afinicznej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle\ ,\rangle$ dane są dwie proste $L = (2,0,1) + lin((1,-2,0))$ i $K = (0,1,1) + lin((-1,1,1))$.
   (a) Znaleźć przedstawienie parametryczne obrazu prostej L przy symetrii prostopadłej względem prostej K.
   (b) Znaleźć wzór rzutu prostopadłego $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ na prostą L.
   (c) Znaleźć odległość $\varrho(L,K)$ między prostymi L i K, tzn. znaleźć minimum z odległości $\varrho(p,q)$, gdzie $p \in L$ i $q \in K$.

2. W afinicznej przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^4$ ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle\ ,\rangle$ dana jest prosta $L = lin((1,-1,1,-1))$ i punkt $p = (2,1,2,1)$. Niech M będzie podprzestrzenią afiniczną $\mathbb{R}^4$ prostopadłą do L i przechodzącą przez punkt p.
   (a) Znaleźć bazę punktową p_0, p_1, p_2, p_3 przestrzeni afinicznej M taką, że wektory $\overrightarrow{p_0p_1}, \overrightarrow{p_0p_2}, \overrightarrow{p_0p_3}$ tworzą bazę ortogonalną przestrzeni stycznej $T(M)$.
   (b) Niech $g\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ będzie taką izometrią przestrzeni $(\mathbb{R}^4, \langle\ ,\rangle)$, że $\{p \in \mathbb{R}^4\colon\ g(p) = p\} = M$. Obliczyć obraz $g((0,1,0,1))$ punktu $(0,1,0,1)$.
   (c) Ile jest zachowujących orientację izometrii f przestrzeni $(\mathbb{R}^4, \langle\ ,\rangle)$ takich, że $f((1,1,-1,-1)) = (1,1,-1,-1)$ i $f((1,1,0,0)) = (1,1,0,0)$ oraz $f'((1,1,1,-1)) = (1,1,1,-1)$ i $f'((-1,1,0,0)) = (1,-1,0,0)$, gdzie f' jest pochodną (inaczej, częścią liniową) f. Odpowiedź starannie uzasadnić.

3. Niech $h_{(r,s)}\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem dwuliniowym symetrycznym na $\mathbb{R}^3$ danym warunkiem $G(h; St) = \begin{pmatrix} r & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & s \end{pmatrix}$, gdzie $r, s \in R$.
   (a) Dla jakich wartości parametrów $r, s \in \mathbb{R}$ funkcjonał $h_{(r,s)}$ jest iloczynem skalarnym na $\mathbb{R}^3$.
   (b) Dla jakich wartości parametru $r \in \mathbb{R}$ funkcjonał $h_{r,2}$ obcięty do $W = lin((1,-1,0),(1,0,-1))$ jest iloczynem skalarnym na W?
   (c) Znaleźć równanie opisujące podprzestrzeń prostopadłą do prostej $lin((-1,1,1))$ w przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^3, h_{(2,2)})$.

4. Dana jest przestrzeń dwuliniowa (V,h), niepusty zbiór $X \subseteq V$ i podprzestrzeń W przestrzeni V.
   (a) Pokazać, że zbiór $X^\perp = \{\alpha \in V\colon\ \alpha \perp \beta\ \forall_{\beta \in X}\}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni V.
   (b) Udowodnić, że $V = W \oplus W^\perp$ wtedy i tylko wtedy gdy W jest nieosobliwa (tzn. przestrzeń dwuliniowa $(W, h|_W)$ jest nieosobliwa).

5. (a) W przestrzeni euklidesowej liniowej $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle\ ,\rangle$ dane są wektory $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ takie, że $\langle \alpha_i, \alpha_j\rangle < 0$ dla każdych $1 \leqslant i < j \leqslant 3$. Niech $W = lin(\alpha_1)^\perp$ oraz niech $\overline{\alpha}_2, \overline{\alpha}_3$ będą rzutami prostopadłymi wektorów α_2, α_3 na W. Wykazać, że $\langle \overline{\alpha}_2, \overline{\alpha}_3\rangle < 0$
   (b) Udowodnić, że jeśli w przestrzeni euklidesowej liniowej $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle\ ,\rangle$ mamy m wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ takich, że $\langle \alpha_i, \alpha_j\rangle < 0$ dla każdych $1 \leqslant i < j \leqslant m$, to $m \leqslant n+1$.
   (c) Wykazać, że w przestrzeni euklidesowej liniowej $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle\ ,\rangle$ istnieje $n+1$ wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$ takich, że $\langle \alpha_i, \alpha_j\rangle < 0$ dla każdych $1 \leqslant i < j \leqslant n+1$.