

GAL potok 1, semestr letni, kolokwium nr 1, 28.03.2008, Temat B

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce.

Na każdej kartce: imię i nazwisko osoby zdającej, numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej, numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

1. Rozpatrzmy endomorfizm $\varphi : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + 2x_2 + x_3, 3x_2 + x_3, x_2 + 3x_3)$ i niech $A = M(\varphi)_{st}$.

a) Czy endomorfizm φ jest diagonalizowalny? Jeśli tak, to podać przykład takiej bazy przestrzeni \mathbf{R}^3 , w której endomorfizm φ ma macierz diagonalną.

b) Dla każdej liczby naturalnej m obliczyć A^m .

c) Podać przykład macierzy $B \in M_{3 \times 3}(\mathbf{R})$ takiej, że $B^5 = A$.

2. Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ oraz $B_r = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & r & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Niech $\varphi : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ będzie zadane warunkiem $M(\varphi)_{st} = A$.

a) Znaleźć macierz Jordana podobną do macierzy A .

b) Znaleźć bazę Jordana dla endomorfizmu φ .

c) Dla jakich $r \in \mathbf{R}$ istnieje taka baza \mathcal{B} przestrzeni \mathbf{R}^4 , że $M(\varphi)_{\mathcal{B}} = B_r$?

3. Niech $\mathcal{A} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 1, 0)\}$, $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$.

a) Funkcjonał $\psi \in (\mathbf{R}^3)^*$ ma w bazie \mathcal{A}^* współrzędne 4, 2, 3. Znaleźć współrzędne funkcyjonału ψ w bazie \mathcal{B}^* .

b) Niech $\varphi_t : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ będzie dane wzorem $\varphi_t((x_1, x_2)) = (x_1 - 3x_2, -2x_1 + 6x_2, -x_1 + tx_2)$. Dla jakich $t \in \mathbf{R}$ przekształcenie φ_t^* nie jest epimorfizmem? Dla każdego takiego t znaleźć bazę przestrzeni $\text{im}(\varphi_t^*)$.

4. a) Niech ψ będzie funkcyjonałem liniowym na przestrzeni V i niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ będzie bazą przestrzeni V . Wykazać, że współrzędne funkcyjonału ψ w bazie \mathcal{A}^* wynoszą $\psi(\alpha_1), \dots, \psi(\alpha_n)$.

b) Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K , niech φ będzie endomorfizmem przestrzeni V i niech $w(\lambda) \in K[\lambda]$ będzie wielomianem charakterystycznym endomorfizmu φ . Wykazać, że $a \in K$ jest wartością własną endomorfizmu φ wtedy i tylko wtedy, gdy $w(a) = 0$.

5. Niech $\varphi : V \rightarrow V$ i $\psi : V \rightarrow V$ będą endomorfizmami n wymiarowej przestrzeni liniowej V i niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią niezmienniczą endomorfizmu φ .

a) Wykazać, że jeśli $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ są wektorami własnymi endomorfizmu φ odpowiadającymi parami różnym wartościom własnym i zachodzi $\alpha_1 + \dots + \alpha_k \in W$, to $\alpha_i \in W$ dla każdego $i = 1, \dots, k$.

b) Wykazać, że jeśli φ jest diagonalizowalny, to $\varphi|_W : W \rightarrow W$ też jest diagonalizowalny.

c) Wykazać, że jeśli φ i ψ są diagonalizowalne i $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$, to istnieje $\alpha \in V$, który jest wektorem własnym φ oraz ψ .