

GAL potok I, kolokwium nr 1, 18.03.2005; Temat B

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce powinno być: imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania oraz litera tematu.

1. Niech endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ będzie dany wzorem $\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (2x_1, -3x_1 - 4x_3 + 2x_4, 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4, x_1 + 2x_4)$ i niech $A = M(\varphi)_{st}$.

a) Znaleźć wartości własne i bazy przestrzeni własnych endomorfizmu φ . Znaleźć postać Jordana macierzy A .

b) Niech $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & t \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Dla jakich $t \in R$ macierze A, B są podobne?

2. Rozpatrzmy macierz $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ r & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Dla jakich $r \in R$ macierz A jest diagonalizowalna nad R ?

b) Dla każdego $r \in R$ dla którego macierz A jest diagonalizowalna nad R obliczyć A^{99} .

3. Niech $H_1 = \text{af}((0, 0, 0, 1), (1, 2, 1, 0), (1, -1, -1, 1)) \subset \mathbb{R}^4$.

a) Znaleźć parametryzację płaszczyzny H_1 i układ równań liniowych opisujący H_1 .

b) Dla jakich wartości parametru $r \in R$ płaszczyzna $H_2 \subset \mathbb{R}^4$ opisana układem

$$\begin{cases} x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + rx_4 = 4 \end{cases}$$

przecina płaszczyznę H_1 w dokładnie jednym punkcie?

4. Niech $w(\lambda) \in K[\lambda]$ będzie wielomianem charakterystycznym endomorfizmu φ . Wykazać, że $a \in K$ jest wartością własną endomorfizmu $\varphi \iff w(a) = 0$.

5. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K .

Niech $\varphi : V \rightarrow V$ będzie endomorfizmem. Mówimy, że podprzestrzeń $W \subset V$ jest φ -niezmiennicza, jeśli dla każdego $\alpha \in W$ zachodzi $\varphi(\alpha) \in W$.

Mówimy, że endomorfizm $\varphi : V \rightarrow V$ jest półprosty, jeśli dla każdej podprzestrzeni φ -niezmienniczej $W \subset V$ istnieje podprzestrzeń φ -niezmiennicza W' taka, że $V = W \oplus W'$.

a) Wykazać, że jeśli ciało K jest algebraicznie domknięte, to każdy endomorfizm półprosty jest diagonalizowalny.

b) Wykazać, że dla dowolnego ciała K każdy diagonalizowalny endomorfizm $\varphi : V \rightarrow V$ jest półprosty.