GAL potok 1, semestr letni, kolokwium nr 1, 28.03.2008, Temat A

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce.
Na każdej kartce: imię i nazwisko osoby zdającej, numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej, numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

1. Rozpatrzmy endomorfizm $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1+x_2+x_3, x_2+2x_3, -x_2+4x_3)$ i niech $A = M(\varphi)_{\mathrm{st}}$.
a) Czy endomorfizm φ jest diagonalizowalny? Jeśli tak, to podać przykład takiej bazy przestrzeni $\mathbf{R}^3$, w której endomorfizm φ ma macierz diagonalną.
b) Dla każdej liczby naturalnej m obliczyć A^m.
c) Padać przykład macierzy $B \in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$ takiej, że $B^7 = A$.

2. Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $B_r = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & r \\ 5 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.
Niech $\varphi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ będzie zadane warunkiem $M(\varphi)_{\mathrm{st}} = A$.
a) Znaleźć macierz Jordana podobną do macierzy A.
b) Znaleźć bazę Jordana dla endomorfizmu φ.
c) Dla jakich $r \in \mathbf{R}$ istnieje taka baza $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbf{R}^4$, że $M(\varphi)_{\mathcal{B}} = B_r$?

3. Niech $\mathcal{A} = \{(1,0,1), (1,1,0), (1,0,0)\}$, $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,1,0)\}$.
a) Funkcjonał $\psi \in (\mathbf{R}^3)^*$ ma w bazie $\mathcal{A}^*$ współrzędne $2, 5, 3$. Znaleźć współrzędne funkcjonału ψ w bazie $\mathcal{B}^*$.
b) Niech $\varphi_t : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ będzie dane wzorem $\varphi_t((x_1, x_2)) = (x_1-2x_2, -2x_1+4x_2, 3x_1+tx_2)$. Dla jakich $t \in \mathbf{R}$ przekształcenie φ_t^* nie jest epimorfizmem? Dla każdego takiego t znaleźć bazę przestrzeni $\mathrm{im}(\varphi_t^*)$.

4. a) Niech ψ będzie funkcjonałem liniowym na przestrzeni V i niech $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ będzie bazą przestrzeni V. Wykazać, że współrzędne funkcjonału ψ w bazie $\mathcal{A}^*$ wynoszą $\psi(\alpha_1), \ldots, \psi(\alpha_n)$.
b) Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K, niech φ będzie endomorfizmem przestrzeni V i niech $w(\lambda) \in K[\lambda]$ będzie wielomianem charakterystycznym endomorfizmu φ. Wykazać, że $a \in K$ jest wartością własną endomorfizmu φ wtedy i tylko wtedy, gdy $w(a) = 0$.

5. Niech $\varphi : V \to V$ i $\psi : V \to V$ będą endomorfizmami n wymiarowej przestrzeni liniowej V i niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią niezmienniczą endomorfizmu φ.
a) Wykazać, że jeśli $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ są wektorami własnymi endomorfizmu φ odpowiadającymi parami różnym wartościom wartościom własnym i zachodzi $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k \in W$, to $\alpha_i \in W$ dla każdego $i = 1, \ldots, k$.
b) Wykazać, że jeśli φ jest diagonalizowalny, to $\varphi|_W : W \to W$ też jest diagonalizowalny.
c) Wykazać, że jeśli φ i ψ są diagonalizowalne i $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$, to istnieje $\alpha \in V$, który jest wektorem własnym φ oraz ψ.