GAL potok I, kolokwium nr 1, 18.03.2005, Temat A

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce powinno być: imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania oraz litera tematu.

1. Niech endomorfizm $\varphi : \mathrm{R}^4 \to \mathrm{R}^4$ będzie dany wzorem $\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)) =$
$= (-9x_2 + 2x_3, x_1 + 6x_2 + x_3, 3x_3, 2x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4)$ i niech $A = M(\varphi)_{\mathrm{st}}$.

a) Znaleźć wartości własne i bazy przestrzeni własnych endomorfizmu φ. Znaleźć postać Jordana macierzy A.

b) Niech $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & t & 4 & 3 \end{bmatrix}$. Dla jakich $t \in R$ macierze A, B są podobne?

2. Rozpatrzmy macierz $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & r & 1 \end{bmatrix}$.

a) Dla jakich $r \in R$ macierz A jest diagonalizowalna nad R?
b) Dla każdego $r \in R$ dla którego macierz A jest diagonalizowalna nad R obliczyć A^{88}.

3. Niech $H_1 = \mathrm{af}((1,0,0,0),(1,2,4,2),(0,1,2,2)) \subset \mathrm{R}^4$.
a) Znaleźć parametryzację płaszczyzny H_1 i układ równań liniowych opisujący H_1.
b) Dla jakich wartości parametru $r \in R$ płaszczyzna $H_2 \subset R^4$ opisana układem

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_1 + rx_2 + x_4 = 2 \end{cases}$$

przecina płaszczyznę H_1 w dokładnie jednym punkcie?

4. Niech $w(\lambda) \in K[\lambda]$ będzie wielomianem charakterystycznym endomorfizmu φ.
Wykazać, że $a \in K$ jest wartością własną endomorfizmu $\varphi \iff w(a) = 0$.

5. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K.
Niech $\varphi : V \to V$ będzie endomorfizmem. Mówimy, że podprzestrzeń $W \subset V$ jest φ-niezmiennicza, jeśli dla każdego $\alpha \in W$ zachodzi $\varphi(\alpha) \in W$.
Mówimy, że endomorfizm $\varphi : V \to V$ jest półprosty, jeśli dla każdej podprzestrzeni φ-niezmienniczej $W \subset V$ istnieje podprzestrzeń φ-niezmiennicza W' taka, że $V = W \oplus W'$.

a) Wykazać, że jeśli ciało K jest algebraicznie domknięte, to każdy endomorfizm półprosty jest diagonalizowalny.
b) Wykazać, że dla dowolnego ciała K każdy diagonalizowalny endomorfizm $\varphi : V \to V$ jest półprosty.