Geometria z Algebrą Liniową, Potok I, rok akademicki 2004/05

Wykład: wtorki godz. 8.30 - 10.00, środy 8.30 - 10.00, sala 4420
Konsultacje: środy, godz. 14.00 - 16.00, sala 5540

Kolokwium nr 1 z GAL-u w semestrze letnim 2003/04

1. Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1+x & 2 \\ 3 & 3 & 1+x \end{pmatrix}$, $B_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 1+x & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 3 & 1+x & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \dots & 1+x \end{pmatrix}$.

   a) Dla jakich wartości parametru $x \in R$ macierz A jest odwracalna? Dla $x = 0$ znaleźć A^{-1}.

   b) Obliczyć $\det B_n$. Dla jakich $n > 0$ macierz B_n jest odwracalna jeśli $x = 179$?

2. Niech endomorfizm $\varphi : R^3 \to R^3$ będzie zadany wzorem:
   $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (5x_1 + 4x_2 + 2x_3, 5x_2 - 2x_3, 4x_2 - x_3)$.

   a) Znaleźć wartości własne endomorfizmu φ i bazy odpowiadających im przestrzeni własnych. Czy endomorfizm φ jest diagonalizowalny?

   b) Czy istnieje baza $\mathcal{B}$ przestrzeni R^3, w której endomorfizm φ ma macierz $M(\varphi)_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$? Jeśli tak, to podać przykład takiej bazy.

3. Niech $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ r & 4 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & s & 5 & 3 \\ -3 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Dla jakich $r \in R$ macierz A jest diagonalizowalna nad R? Dla każdego takiego r znaleźć macierz odwracalną $C \in M_{3\times 3}(R)$ taką, że $C^{-1}AC$ jest diagonalna.

b) Dla jakich par $r, s \in R$ macierz A jest podobna do macierzy B.

4. Niech $H = \mathrm{af}((2,-1,1),(4,-1,2),(4,1,3))$.

   a) Znaleźć parametryzację i równanie płaszczyzny P zawierającej $(2,0,-1)$ i równoległej do H. Czy płaszczyzna P zawiera prostą $\mathrm{af}((2,0,-1),(1,1,-1))$?

   b) Znaleźć punkt przecięcia H z prostą $\mathrm{af}((3,4,3),(4,3,2))$.

5. Niech φ będzie endomorfizmem n-wymiarowej przestrzeni liniowej nad K mającym wielomian charakterystyczny $w(\lambda) = (a_1-\lambda)^{n_1}(a_2-\lambda)^{n_2}\dots(a_s-\lambda)^{n_s}$, gdzie $a_i \in K$ są parami różne. Załóżmy, że dla $i = 1, \dots, s$, wymiar podprzestrzeni własnej odpowiadającej wartości własnej a_i wynosi k_i. Niech $\psi = \varphi - a_1\mathrm{id}$ i niech v będzie wielomianem charakterystycznym endomorfizmu $\psi|\mathrm{im}\psi : \mathrm{im}\psi \to \mathrm{im}\psi$. Znaleźć

   a) stopień wielomianu v,

   b) pierwiastki wielomianu v i ich krotności.