GAL, Kolokwium, Temat A

20 marca 2001

Zadanie 1

Niech $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, $B_t = \begin{bmatrix} t & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ i niech $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie takim endomorfizmem, że $M(\varphi)_{st}^{st} = A$.

(a) Dla jakich $t \in \mathbb{R}$ macierz A jest podobna do B_t. Znaleźć wartości własne i bazy przestrzeni własnych endomorfizmu φ.

(b) Zbadać czy macierz A jest diagonalizowalna nad $\mathbb{R}$. Jeśli tak, to wyznaczyć macierz odwracalną $P \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ taką, że $P^{-1}AP$ jest diagonalna.

(c) Znaleźć wartość własne i bazy przestrzeni własnych endomorfizmu φ^{-1}.

Zadanie 2

Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Znaleźć macierz Jordana podobną do A.

(b) Czy macierz B jest podobna do A?

(c) Czy macierz B^3 jest podobna do A?

Zadanie 3

Niech $H = \mathrm{af}((2,1,0),(1,2,0),(0,1,-1),(5,2,2))$ i $L_a : (3,4,5) + t(1,a,a)$.

(a) Znaleźć układ równań opisujący H.

(b) Znaleźć część wspólną $H \cap L_a$ przestrzeni afinicznej H i prostej L_a dla $a = 4$.

(c) Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ prosta L_a jest równoległa do H? Dla każdego takiego a znaleźć równanie płaszczyzny P równoległej do H i zawierającej prostą L_a.

Zadanie 4

Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ będzie macierzą rzędu 1 taką, że A ma niezerową wartość własną.

(a) Wykazać, ze A jest diagonalizowalna.

(b) Wykazać, że jeśli $AB = BA$, to endomorfizm $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ taki, że $M(\psi)_{st}^{st} = B$, ma wektor własny.

(c) Wykazać, że jeśli ψ jest takie jak w (b), a n jest parzyste, to ψ ma co najmniej dwa liniowo niezależne wektory własne.