Sprawdzian 3
2 kwietnia 2009

Zadanie 1 *Niech* $f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ *będzie opisane macierzą*

$$M(f) = \begin{bmatrix} 7 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 8 & 2 & -7 \end{bmatrix},$$

a) Znajdź bazę, w której macierz f jest w postaci Jordana.

b) Zbadaj, czy macierze $M(f)$ *i* $M(f^{-1})$ *są podobne.*

Zadanie 2 *Niech* $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ 8 & -6 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

a) Podaj postać Jordana macierzy A.

b) Wypisz wszystkie macierze Jordana, które mają ten sam wielomian charakterystyczny i ten sam wielomian minimalny co A.

Zadanie 3 *Oblicz* $\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{10}$.

Zadanie 4 *Niech A,B,C będą trzema punktami przestrzeni afinicznej* $\mathbb{R}^n$. *Budujemy 3 środkowe:* $l_A = af\{A,\ \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C\}$, $l_B = af\{B,\ \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C\}$ *i* $l_C = af\{C,\ \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}A\}$.

a) Udowodnij, że zbiór $l_A \cap l_B \cap l_C$ *jest niepusty.*

b) Wykaż, że jeżeli $l_A \cap l_B$ *ma co najmniej dwa punkty to* $\dim af\{A,\ B,\ C\} < 2$.

Zadanie 5 *Badamy dwie podprzestrzenie afiniczne* $\mathbb{R}^4$.

$A = af\,\{[1,1,1,1], [1,0,1,1], [0,1,0,1], [3,1,3,1]\}$

$i\ B\ :\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}.$

Znajdź bazę punktową $A \cap B$.

Zadanie 6 *Napisz wzór analityczny i macierz rzutu* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *na prostą* $l = af\,\{[1,-2,3], [1,0,2]\}$ *wzdłuż płaszczyzny opisanej równaniem*

$x_1 - x_2 + x_3 = 2.$