GAL, Kolokwium 1, 31.03.2009

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach).
Na każdej kartce prosze podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE) i numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczeszcza,
numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

TEMAT **A**

(1) Niech $A_x = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & x \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (gdzie $x \in \mathbb{R}$) $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

(a) Obliczyć $\det(A_x^5 \cdot B^{-1})$ w zależności od parametru $x \in \mathbb{R}$.

(b) Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $M(\varphi)_{\mathcal{S}t}^{\mathcal{S}t} = A_1$ (gdzie $\mathcal{S}t$ jest bazą standardową w $\mathbb{R}^4$). Pokazać, że φ jest izomorfizmem i znaleźć wzór na φ^{-1}.

(c) Niech $\psi_x\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $M(\varphi)_{\mathcal{S}t}^{\mathcal{S}t} = A_x \cdot B$. Dla jakich wartości parametru $x \in \mathbb{R}$, ψ_x nie jest monomorfizmem.

(2) Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ będzie endomorfizmem takim, że $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_2 - x_3, -x_2, -x_1 - x_2)$.

(a) Znaleźć wartości własne φ oraz bazy odpowiadających im przestrzeni własnych. Czy φ jest diagonalizowalny? Jeśli tak podać przykład bazy przestrzeni $\mathbb{R}^3$ w której φ ma macierz diagonalną.

(b) Czy istnieje baza $\mathcal{B}$ w $\mathbb{R}^3$ taka, że $M(\varphi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Odpowiedź należy uzasadnić.

(c) Czy istnieje baza $\mathcal{C}$ w $\mathbb{R}^3$ taka, że $M(\varphi)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Odpowiedź należy uzasadnić.

(3) $\mathcal{A} : (1,1,3), (1,-2,1), (-2,-2,1)$ i $\mathcal{B} : (1,1,1), (1,1,0), (0,1,1)$ bazy przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym takimi, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Niech $f_t\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem liniowym takim, że $f_t((x_1, x_2, x_3)) = (1-t)x_1 + tx_2$, gdzie $t \in \mathbb{R}$.

(a) Znaleźć wzory na funkcjonały z bazy sprzężonej $\mathcal{B}^*$, oraz współrzędne funkcjonału f_{-1} w bazie $\mathcal{B}^*$.

(b) Znaleźć bazę $\ker(\varphi^*)$ (funkcjonały otrzymanej bazy podać wzorami).

(c) Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$, funkcjonał f_t należy do $im(\varphi^*)$.

(4) V jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K, $\varphi\colon V \longrightarrow V$ endomorfizmem przestrzeni V.

(a) Niech $v_1, \ldots, v_n$ będzie bazą V. Dla $i = 1, 2, \ldots, n$, niech $f_i\colon V \longrightarrow K$ będzie funkcionałem liniowym takim, że $f_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$. Udowodnić, że $f_1, f_2, \ldots, f_n$ są liniowo niezależne w przestrzeni sprzężonej V^*.

(b) Niech $u_1, u_2, \ldots, u_k$ będą wektorami własnymi endomorfizmu φ o wartościach własnych $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Pokazać, że jeśli $a_1, a_2, \ldots, a_k$ są parami różne (tzn. $a_i \neq a_j$ dla $i \neq j$), to wektory $u_1, u_2, \ldots, u_k$ są liniowo niezależne.

(5) (a) Pokazać, że jeśli V jest dwuwymiarową przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, to dla dowolnego endomorfizmu $\varphi\colon V \longrightarrow V$ którego ślad jest równy zero (tzn. $tr(\varphi) = 0$), istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni V taka, że macierz $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ ma postać $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ (tzn. macierz ma zerową przekątna).

(b) Udowodnić, że punkt (a) jest prawdziwy również dla przestrzeni dowolnego skończonego wymiaru, tzn. dla dowolnej skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V nad $\mathbb{R}$ i dowolnego endomorfizmu $\varphi\colon V \longrightarrow V$ takiego, że $tr(\varphi) = 0$, istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni V w której macierz $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ ma zerową przekątną.

GAL, Kolokwium 1, 31.03.2009

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach).
Na każdej kartce prosze podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE) i numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczeszcza,
numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

TEMAT **B**

(1) Niech $A_x = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ (gdzie $x \in \mathbb{R}$), $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

(a) Obliczyć $\det(A_x^5 \cdot B^{-1})$ w zależności od parametru $x \in \mathbb{R}$.

(b) Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem liniowym takim, że $M(\varphi)_{\mathcal{S}t}^{\mathcal{S}t} = A_2$. Pokazać, że φ jest izomorfizmem i znaleźć wzór na φ^{-1}.

(c) Niech $\psi_x\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ będzie przekształceniem liniowem takim, że $M(\varphi)_{\mathcal{S}t}^{\mathcal{S}t} = A_x \cdot B$. Dla jakich wartości parametru $x \in \mathbb{R}$, ψ_x nie jest monomorfizmem.

(2) Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ będzie endomorfizmem takim, że $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (-x_2 + x_3, x_2, x_1 + x_2)$.

(a) Znaleźć wartości własne φ oraz bazy odpowiadających im przestrzeni własnych. Czy φ jest diagonalizowalny? Jeśli tak podać przykład bazy przestrzeni $\mathbb{R}^3$ w której φ ma macierz diagonalną.

(b) Czy istnieje baza $\mathcal{B}$ w $\mathbb{R}^3$ taka, że $M(\varphi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Odpowiedź należy uzasadnić.

(c) Czy istnieje baza $\mathcal{C}$ w $\mathbb{R}^3$ taka, że $M(\varphi)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Odpowiedź należy uzasadnić.

(3) $\mathcal{A}$: $(3,1,1), (1,-2,1), (1,-2,-2)$ i $\mathcal{B}$: $(1,1,0), (0,1,1), (1,1,1)$ bazy przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ będzie przekształceniem liniowym takimi, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Niech $f_t\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcjonałem liniowym takim, że $f_t((x_1, x_2, x_3)) = tx_2 + (1-t)x_3$, gdzie $t \in \mathbb{R}$.

(a) Znaleźć wzory na funkcjonały z bazy sprzężonej $\mathcal{B}^*$, oraz współrzędne funkcjonału f_3 w bazie $\mathcal{B}^*$.

(b) Znaleźć bazę $\ker(\varphi^*)$ (funkcjonały otrzymanej bazy podać wzorami).

(c) Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$, funkcjonał f_t należy do $im(\varphi^*)$.

(4) V jest skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K, $\varphi\colon V \longrightarrow V$ endomorfizmem przestrzeni V.

(a) Niech $v_1, \ldots, v_n$ będzie bazą V. Dla $i = 1, 2, \ldots, n$, niech $f_i\colon V \longrightarrow K$ będzie funkcionałem liniowym takim, że $f_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$. Udowodnić, że $f_1, f_2, \ldots, f_n$ są liniowo niezależne w przestrzeni sprzężonej V^*.

(b) Niech $u_1, u_2, \ldots, u_k$ będą wektorami własnymi endomorfizmu φ o wartościach własnych $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Pokazać, że jeśli $a_1, a_2, \ldots, a_k$ są parami różne (tzn. $a_i \neq a_j$ dla $i \neq j$), to wektory $u_1, u_2, \ldots, u_k$ są liniowo niezależne.

(5) (a) Pokazać, że jeśli V jest dwuwymiarową przestrzenią liniową nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$, to dla dowolnego endomorfizmu $\varphi\colon V \longrightarrow V$ którego ślad jest równy zero (tzn. $tr(\varphi) = 0$), istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni V taka, że macierz $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ ma postać $\begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ (tzn. macierz ma zerową przekątna).

(b) Udowodnić, że punkt (a) jest prawdziwy również dla przestrzeni dowolnego skończonego wymiaru, tzn. dla dowolnej skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V nad $\mathbb{R}$ i dowolnego endomorfizmu $\varphi\colon V \longrightarrow V$ takiego, że $tr(\varphi) = 0$, istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni V w której macierz $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ ma zerową przekątną.