GAL, Kolokwium 3 TEMAT B 01.04.2011

Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach).
Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. Niech $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ będzie macierzą o wyrazach rzeczywistych.

   (a) Znaleźć bazy przestrzeni własnych endomorfizmu $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ danego warunkiem $M(\varphi)_{St}^{St} = A$. Czy macierz A jest diagonalizowalna nad $\mathbb{R}$? Odpowiedź uzasadnić.

   (b) Znaleźć bazy przestrzeni własnych endomorfizmu $\psi\colon \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ danego warunkiem $M(\psi)_{St}^{St} = A$. Czy macierz A jest diagonalizowalna nad $\mathbb{C}$? Odpowiedź uzasadnić.

   (c) Obliczyć A^{44}.

2. Dane są macierze rzeczywiste $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & t \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

   (a) Znaleźć postać Jordana macierzy A.

   (b) Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ macierze A i B_t są podobne?

   (c) Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ będzie endomorfizmem danym warunkiem $M(\varphi)_{St}^{St} = A$. Czy $\mathbb{R}^4$ ma 3-wymiarową podprzestrzeń φ–niezmienniczą (tzn. czy istnieje podprzestrzeń V wymiaru 3 przestrzeni $\mathbb{R}^4$ taka, że $\varphi(v) \in V$ dla każdego $v \in V$)? Odpowiedź uzasadnić.

3. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dana jest płaszczyzna $H = af((0,2,1),(1,3,1),(1,2,0))$, punkt $p = (1,1,3)$, oraz dwie proste L: $(1,1,1) + lin\{(2,-1,2)\}$ i K: $(2,-2,1) + lin\{(-1,1,1)\}$.

   (a) Znaleźć układ równań opisujący płaszczyznę F przechodzącą przez punkt p i równoległą do H.

   (b) Znaleźć przedstawienie parametryczne rzutu prostej L na H wzdłuż prostej K.

4. Niech $\varphi\colon V \longrightarrow V$ będzie endomorfizmem skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V (nad ciałem K). Niech $a_1, \ldots, a_k$ będą wszystkimi, parami różnymi, wartościami własnymi endomorfizmu φ, oraz niech $V_{(a_1)}, \ldots, V_{(a_k)}$ będą podprzestrzeniami własnymi odpowiadającymi tym wartością własnym.

   (a) Udowodnić, że dla dowolnych niezerowych wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, jeśli $\alpha_i \in V_{(a_i)}$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$, to układ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny.

   (b) Udowodnić, że jeśli $\sum_{i=1}^{i=k} \dim(V_{(a_i)}) = \dim V$, to φ jest diagonalizowalny.

5. (a) Niech $A, B \in M_{n\times n}(K)$. Definiujemy zbiory $\mathcal{S}(A) = \{X \in M_{n\times n}(K) : \det X \neq 0 \text{ i } XA = AX\}$ i $\mathcal{T}(A,B) = \{C \in M_{n\times n}(K) : \det C \neq 0 \text{ i } B = C^{-1}AC\}$. Wykazać, że dla każdego $D \in \mathcal{T}(A,B)$ zachodzi równość $\mathcal{T}(A,B) = \{XD : X \in \mathcal{S}(A)\}$.

   (b) Czy istnieją macierze $B, C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ takie, że $BC - CB = I$, gdzie I jest macierzą jednostkową? Jeśli tak, to podać przykład takich macierzy B i C. Jeśli nie, odpowiedź uzasadnić.

   (c) Niech $A \in M_{n\times n}(K)$ i niech $\widehat{A} \in M_{n\times n}(K)$ będzie macierzą powstałą z A przez przestawienie jej wyrazów za pomocą symetrii środkowej względem środka macierzy A (tzn. $\widehat{A} = [\widehat{a}_{i,j}]$, gdzie $\widehat{a}_{i,j} = a_{n+1-i,n+1-j}$). Czy macierze A i $\widehat{A}$ są podobne? Jeśli tak, to podać przykład takiej macierzy $P \in M_{n\times n}(K)$, że $\widehat{A} = P^{-1}AP$. Jeśli nie, odpowiedź uzasadnić.