

Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach).

Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNICIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. Niech $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ będzie macierzą o wyrazach rzeczywistych.

- (a) Znaleźć bazy przestrzeni własnych endomorfizmu $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ danego warunkiem $M(\varphi)_{S_t}^{S_t} = A$. Czy macierz A jest diagonalizowalna nad \mathbb{R} ? Odpowiedź uzasadnić.
- (b) Znaleźć bazy przestrzeni własnych endomorfizmu $\psi: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ danego warunkiem $M(\psi)_{S_t}^{S_t} = A$. Czy macierz A jest diagonalizowalna nad \mathbb{C} ? Odpowiedź uzasadnić.
- (c) Obliczyć A^{44} .

2. Dane są macierze rzeczywiste $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B_t = \begin{pmatrix} -1 & t & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

- (a) Znaleźć postać Jordana macierzy A .
 - (b) Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$ macierze A i B_t są podobne?
 - (c) Niech $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ będzie endomorfizmem danym warunkiem $M(\varphi)_{S_t}^{S_t} = A$. Czy \mathbb{R}^4 ma 3-wymiarową podprzestrzeń φ -niezmienniczą (tzn. czy istnieje podprzestrzeń V wymiaru 3 przestrzeni \mathbb{R}^4 taka, że $\varphi(v) \in V$ dla każdego $v \in V$)? Odpowiedź uzasadnić.
3. W przestrzeni \mathbb{R}^3 dana jest płaszczyzna $H = af((1, 1, 1), (2, 1, 2), (1, 0, 2))$, punkt $p = (1, 2, 3)$, oraz dwie proste $L: (1, -1, 1) + \text{lin}\{(2, 2, 1)\}$ i $K: (-2, 2, 3) + \text{lin}\{(1, 1, 1)\}$.

- (a) Znaleźć układ równań opisujący płaszczyznę F przechodzącą przez punkt p i równoległą do H .
- (b) Znaleźć przedstawienie parametryczne rzutu prostej L na H wzdłuż prostej K .

4. Niech $\varphi: V \rightarrow V$ będzie endomorfizmem skończenie wymiarowej przestrzeni liniowej V (nad ciałem K). Niech a_1, \dots, a_k będą wszystkimi, parami różnymi, wartościami własnymi endomorfizmu φ , oraz niech $V_{(a_1)}, \dots, V_{(a_k)}$ będą podprzestrzeniami własnymi odpowiadającymi tym wartościami własnym.

- (a) Udowodnić, że dla dowolnych niezerowych wektorów $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$, jeśli $\alpha_i \in V_{(a_i)}$ dla $i = 1, 2, \dots, k$, to układ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny.
 - (b) Udowodnić, że jeśli $\sum_{i=1}^k \dim(V_{(a_i)}) = \dim V$, to φ jest diagonalizowalny.
5. (a) Niech $A, B \in M_{n \times n}(K)$. Definiujemy zbiory $S(A) = \{X \in M_{n \times n}(K) : \det X \neq 0 \text{ i } XA = AX\}$ i $T(A, B) = \{C \in M_{n \times n}(K) : \det C \neq 0 \text{ i } B = C^{-1}AC\}$. Wykazać, że dla każdego $D \in T(A, B)$ zachodzi równość $T(A, B) = \{XD : X \in S(A)\}$.

(b) Czy istnieją macierze $B, C \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ takie, że $BC - CB = I$, gdzie I jest macierzą jednostkową? Jeśli tak, to podać przykład takich macierzy B i C . Jeśli nie, odpowiedź uzasadnić.

(c) Niech $A \in M_{n \times n}(K)$ i niech $\hat{A} \in M_{n \times n}(K)$ będzie macierzą powstałą z A przez przestawienie jej wyrazów za pomocą symetrii środkowej względem środka macierzy A (tzn. $\hat{A} = [\hat{a}_{i,j}]$, gdzie $\hat{a}_{i,j} = a_{n+1-i, n+1-j}$). Czy macierze A i \hat{A} są podobne? Jeśli tak, to podać przykład takiej macierzy $P \in M_{n \times n}(K)$, że $\hat{A} = P^{-1}AP$. Jeśli nie, odpowiedź uzasadnić.