GAL, Kolokwium 1 TEMAT **A** 30.03.2012

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce prosze podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczeszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. Dane są macierze $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $P_{(t,s)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & t & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, gdzie $t, s \in \mathbb{R}$.

   (a) Czy macierz A jest diagonalizowalna nad $\mathbb{R}$? Jeśli tak, to podać przykład takiej macierzy $C \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$, że macierz $C^{-1}AC$ jest diagonalna.

   (b) Znaleźć postać Jordana macierzy Q.

   (c) Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ będzie endomorfimem takim, że $M(\varphi)_{\mathcal{S}t}^{\mathcal{S}t} = Q$. Dla jakich wartości parametrów $t, s \in \mathbb{R}$, istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ taka, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = P_{(t,s)}$.

2. Dana jest macierz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ oraz endomorfizm $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ taki, że $M(\varphi)_{\mathcal{S}t}^{\mathcal{S}t} = A$.

   (a) Znaleźć bazę Jordana dla φ.

   (b) Dla jakich liczb całkowitych dodatnich n istnieje $n-$wymiarowa $\varphi-$niezmiennicza podprzestrzeń $W \subseteq \mathbb{R}^3$ taka, że $\varphi_{|W}\colon W \longrightarrow W$ jest diagonalizowalny? Odpowiedź uzasadnić.
   (Podprzestrzeń W nazywamy $\varphi-$niezmienniczą, jeśli $\forall \alpha \in W \;\; \varphi(\alpha) \in W$.)

   (c) Niech $A^{81} = B$. Wyznaczyć macierz B.

3. W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ dana jest płaszczyzna $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\colon\; x_1 - x_2 + 2x_3 = 2\}$ oraz punkty $q_1 = (1, -1, 1)$, $q_2 = (2, 0, 2)$.

   (a) Niech L będzie prostą równoległą do prostej $\mathrm{af}(q_1, q_2)$ przechodzącą przez punkt $(-1, 1, 1)$. Znaleźć punkt przecięcia L z M.

   (b) Podać wzór na przekształcenie afiniczne $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ takie, że $\forall p \in M \;\; f(p) = p$ oraz $f((2, 1, 0)) = (0, 1, 1)$.

   (c) Niech $L_r = (2, 1, 0) + \mathrm{lin}\,((3, r, 1))$. Dla jakich $r \in \mathbb{R}$ istnieje przekształcenie afiniczne $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ takie, że $\forall p \in M \;\; g(p) = (1, 1, 1)$ oraz $\forall p \in L_r \;\; g(p) = (3, 1, 3)$? Odpowiedź uzasadnić, zarówno gdy g istnieje, jak i gdy g nie istnieje.

4. (a) Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będą wektorami własnymi endomorfizmu $\varphi : V \longrightarrow V$, mającymi wartości własne $a_1, \ldots, a_k$, odpowiednio, przy czym $a_i \neq a_j$ dla $i \neq j$. Wykazać, że układ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny.

   (b) Niech $p_0, \ldots p_k$ będą punktami przestrzeni afinicznej H. Wykazać, że warunek: żaden z punktów $p_0, \ldots p_k$ nie jest kombinacją afiniczną pozostałych jest równoważny warunkowi: układ wektorów $\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}$ jest liniowo niezależny.

   (c) Dane są macierze $A, B \in M_{m\times n}(K)$. Wykazać, że $r(A) = r(B)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : K^n \longrightarrow K^m$ oraz bazy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ w K^n i bazy $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ w K^m takie, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = A$ oraz $M(\varphi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = B$.

verte $\longrightarrow$

5. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K.

   (a) Niech $\varphi : V \longrightarrow V$ będzie endomorfizmem diagonalizowalnym o wartościach własnych $a_1, \ldots, a_k$, gdzie $a_i \neq a_j$ dla $i \neq j$. Udowodnić, że dla każdej podprzestrzeni $\varphi-$niezmienniczej $W \subset V$ zachodzi równość $W = (W \cap V_{(a_1)}) \oplus \ldots \oplus (W \cap V_{(a_k)})$.

   (b) Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym. Wykazać, że endomorfizm $\varphi : V \longrightarrow V$ jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej podprzestrzeni $\varphi-$niezmienniczej $W \subset V$ istnieje podprzestrzeń $\varphi-$niezmiennicza $Z \subset V$ taka, że $V = W \oplus Z$.

   (c) Niech $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k : V \longrightarrow V$ będą rzutowaniami takimi, że

      i. $\pi_i \circ \pi_j = 0$ dla $i \neq j$,

      ii. $\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_k = id_V$.

   Udowodnić, że dla dowolnych $a_1, a_2, \ldots, a_k \in K$, endomorfizm $\varphi = a_1\pi_1 + a_2\pi_2 + \ldots + a_k\pi_k$ jest diagonalizowalny.

GAL, Kolokwium 1 TEMAT **B** 30.03.2012

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce prosze podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, nazwisko prowadzącego ćwiczenia lub numer grupy do której osoba zdająca uczeszcza, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

1. Dane są macierze $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $P_{(t,s)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & t & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & s \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, gdzie $t, s \in \mathbb{R}$.
   (a) Czy macierz A jest diagonalizowalna nad $\mathbb{R}$? Jeśli tak, to podać przykład takiej macierzy $C \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$, że macierz $C^{-1}AC$ jest diagonalna.
   (b) Znaleźć postać Jordana macierzy Q.
   (c) Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ będzie endomorfimem takim, że $M(\varphi)_{\mathcal{S}t}^{\mathcal{S}t} = Q$. Dla jakich wartości parametrów $t, s \in \mathbb{R}$, istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^4$ taka, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}} = P_{(t,s)}$.

2. Dana jest macierz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ oraz endomorfizm $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ taki, że $M(\varphi)_{\mathcal{S}t}^{\mathcal{S}t} = A$.
   (a) Znaleźć bazę Jordana dla φ.
   (b) Dla jakich liczb całkowitych dodatnich n istnieje $n-$wymiarowa $\varphi-$niezmiennicza podprzestrzeń $W \subseteq \mathbb{R}^3$ taka, że $\varphi_{|W}\colon W \longrightarrow W$ jest diagonalizowalny? Odpowiedź uzasadnić. (Podprzestrzeń W nazywamy $\varphi-$niezmienniczą, jeśli $\forall \alpha \in W \;\; \varphi(\alpha) \in W$.)
   (c) Niech $A^{71} = B$. Wyznaczyć macierz B.

3. W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ dana jest płaszczyzna $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\colon\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -2\}$ oraz punkty $q_1 = (1, 1, 0)$, $q_2 = (2, 2, 1)$.
   (a) Niech L będzie prostą równoległą do prostej $\mathrm{af}(q_1, q_2)$ przechodzącą przez punkt $(1, -1, 1)$. Znaleźć punkt przecięcia L z M.
   (b) Podać wzór na przekształcenie afiniczne $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ takie, że $\forall p \in M \;\; f(p) = p$ oraz $f((1, 0, 3)) = (1, 1, 2)$.
   (c) Niech $L_r = (0, 1, 2) + \mathrm{lin}\,((1, -1, r))$. Dla jakich $r \in \mathbb{R}$ istnieje przekształcenie afiniczne $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ takie, że $\forall p \in M \;\; g(p) = (-1, 1, 1)$ oraz $\forall p \in L_r \;\; g(p) = (2, 1, 1)$? Odpowiedź uzasadnić, zarówno gdy g istnieje, jak i gdy g nie istnieje.

4. (a) Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będą wektorami własnymi endomorfizmu $\varphi : V \longrightarrow V$, mającymi wartości własne $a_1, \ldots, a_k$, odpowiednio, przy czym $a_i \neq a_j$ dla $i \neq j$. Wykazać, że układ wektorów $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jest liniowo niezależny.
   (b) Niech $p_0, \ldots p_k$ będą punktami przestrzeni afinicznej H. Wykazać, że warunek: żaden z punktów $p_0, \ldots p_k$ nie jest kombinacją afiniczną pozostałych jest równoważny warunkowi: układ wektorów $\overrightarrow{p_0p_1}, \ldots, \overrightarrow{p_0p_k}$ jest liniowo niezależny.
   (c) Dane są macierze $A, B \in M_{m\times n}(K)$. Wykazać, że $r(A) = r(B)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje przekształcenie liniowe $\varphi : K^n \longrightarrow K^m$ oraz bazy $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ w K^n i bazy $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ w K^m takie, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = A$ oraz $M(\varphi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = B$.

verte $\longrightarrow$

5. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad ciałem K.

   (a) Niech $\varphi : V \longrightarrow V$ będzie endomorfizmem diagonalizowalnym o wartościach własnych $a_1, \ldots, a_k$, gdzie $a_i \neq a_j$ dla $i \neq j$. Udowodnić, że dla każdej podprzestrzeni $\varphi-$niezmienniczej $W \subset V$ zachodzi równość $W = (W \cap V_{(a_1)}) \oplus \ldots \oplus (W \cap V_{(a_k)})$.

   (b) Niech K będzie ciałem algebraicznie domkniętym. Wykazać, że endomorfizm $\varphi : V \longrightarrow V$ jest diagonalizowalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej podprzestrzeni $\varphi-$niezmienniczej $W \subset V$ istnieje podprzestrzeń $\varphi-$niezmiennicza $Z \subset V$ taka, że $V = W \oplus Z$.

   (c) Niech $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k : V \longrightarrow V$ będą rzutowaniami takimi, że

      i. $\pi_i \circ \pi_j = 0$ dla $i \neq j$,

      ii. $\pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_k = id_V$.

   Udowodnić, że dla dowolnych $a_1, a_2, \ldots, a_k \in K$, endomorfizm $\varphi = a_1\pi_1 + a_2\pi_2 + \ldots + a_k\pi_k$ jest diagonalizowalny.