O macierzach Jordana

Załóżmy, że dana jest macierz A, dla której szukamy rozkładu Jordana $A = CJC^{-1}$.

I O co chodzi w macierzach Jordana? (Przymiarka)

1. Zaczniemy od końca. Chcemy znajdować J na podstawie A, ale związki między tymi macierzami łatwiej jest zrozumieć w przeciwną stronę. Załóżmy więc tymczasowo, że znamy J, na przykład:

$$J = \begin{bmatrix} 5 & 1 & & & \\ & 5 & & & \\ & & 5 & & \\ & & & 7 & 1 \\ & & & & 7 \end{bmatrix}.$$

i zastanówmy się, czy to nam mówi coś na temat A? Chyba nic wyraźnego. Jeśli jednak rozważymy przekształcenie φ odpowiadające macierzy A (w bazach standardowych), to łatwo zobaczyć, że

szukanie rozkładu Jordana dla A $\quad\Leftrightarrow\quad$ szukanie bazy, w której φ ładnie wygląda,

a dokładniej:

szukanie C takiego, że $A = CJC^{-1}$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ szukanie bazy $\mathcal{C}$ takiej, że $M(\varphi)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = J$

(wtedy kolumny C odpowiadają wektorom z $\mathcal{C}$). Poniżej zobaczymy, co mówi J na temat φ.

2. Oznaczmy teraz wektory bazy $\mathcal{C}$ przez $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5$. Wówczas z macierzy J odczytujemy warunki

$$\varphi(\gamma_1) = 5\gamma_1, \qquad \varphi(\gamma_2) = \gamma_1 + 5\gamma_2, \qquad \ldots$$

To nie jest zbyt czytelne. Zamiast tego popatrzmy, co robi przekształcenie $\varphi - 5 \cdot \mathrm{id}$, które oznaczymy przez $\varphi_{(5)}$:

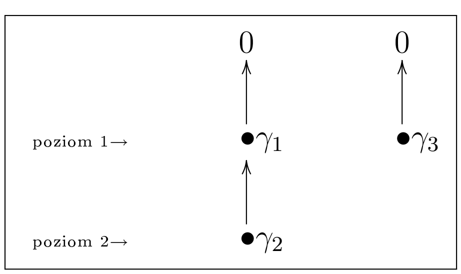
$$\varphi_{(5)}(\gamma_1) = 0, \qquad \varphi_{(5)}(\gamma_2) = \gamma_1, \qquad \varphi_{(5)}(\gamma_3) = 0$$

Analogicznie mamy

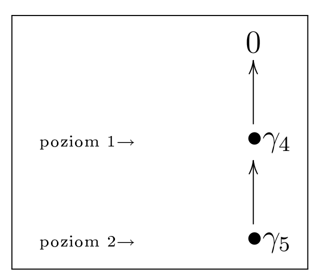
$$\varphi_{(7)}(\gamma_4) = 0, \qquad \varphi_{(7)}(\gamma_5) = 0.$$

To wygląda sugestywnie na obrazkach:

$\varphi - 5 \cdot \mathrm{id}$:



$\varphi - 7 \cdot \mathrm{id}$:



Obrazki zawsze składają się ze "sznurków". Każdy sznurek odpowiada jednej klatce Jordana w J. Znalezienie postaci Jordana dla A polega na znalezieniu odpowiedniej "sznurkowej" bazy dla φ.

3. Zanim opiszemy metodę, omówmy kilka własności baz Jordana. Ustalmy liczbę (zespoloną) λ. Od tej chwili rozważamy wyłącznie rysunek sznurków dla $\varphi_{(\lambda)}$.

(a) Sznurki istnieją wtedy i tylko wtedy, gdy λ jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego macierzy A.

Bo: λ jest pierwiastkiem $\Leftrightarrow$ $\det M(\varphi_{(\lambda)})^{\mathrm{st}}_{\mathrm{st}} = 0 \Leftrightarrow \varphi_{(\lambda)}$ ma nietrywialne jądro $\Leftrightarrow$ są jakieś sznurki.

(b) Liczba wektorów na rysunku jest równa krotności λ jako pierwiastka wielomianu charakterystycznego.

Bo: wielomiany charakterystyczne macierzy A i J są takie same. A dla macierzy J to widać.

(c) Wektory pierwszego poziomu tworzą bazę jądra $\varphi_{(\lambda)}$.
Ogólniej: wektory pierwszych i poziomów tworzą bazę $\ker {\varphi_{(\lambda)}}^i$.
Stąd z kolei wynika, że liczba wektorów na poziomie i wynosi $\dim\ker {\varphi_{(\lambda)}}^i - \dim\ker {\varphi_{(\lambda)}}^{i-1}$.

(d) Wektory drugiego poziomu przechodzą przy $\varphi_{(\lambda)}$ na wektory pierwszego poziomu. To banalne, ale ma ważny skutek: baza na poziomie pierwszym nie może być dowolna.

Mianowicie baza ta musi *widzieć* obraz podprzestrzeni rozpinanej przez wektory drugiego poziomu, tzn. widzieć $\varphi_{(\lambda)}(\ker {\varphi_{(\lambda)}}^2)$.

Ogólniej: wektory i-tego poziomu muszą widzieć $\varphi_{(\lambda)}(\ker {\varphi_{(\lambda)}}^{i+1})$.

4. Rozumowanie "od końca" dało już jakieś efekty: z (a) i (b) wynika, że znając wielomian charakterystyczny A możemy ustalić, jak wygląda przekątna macierzy J. Ale to dopiero początek; trzeba jeszcze odtworzyć komplet informacji o sznurkach.

II Jak szukać rozkładu Jordana? (Podejście ogólne)

Zaczynamy pracować na konkretnym przykładzie:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ -2 & 2 & 1 & & & & \\ & 2 & 2 & & & & \\ 2 & -1 & -1 & 2 & 1 & & \\ -2 & & 1 & & 2 & & \\ 1 & -2 & & & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & -3 & & 3 & & -1 \end{bmatrix}$$

1. Znajdujemy pierwiastki wielomianu charakterystycznego A oraz ich krotności. Dla każdego pierwiastka λ będziemy tworzyć osobno rysunek sznurków dla przekształcenia $\varphi_{(\lambda)}$.

W przykładzie wielomian ma 2 pierwiastki: 2 (pięciokrotny) oraz -1 (dwukrotny).

Mamy więc rysunek dla $\varphi_{(2)}$ z pięcioma kropkami oraz dla $\varphi_{(-1)}$ z dwoma, ale jeszcze nie wiemy, jak te kropki są powiązane w sznurki.

2. Obliczamy kolejne potęgi $\varphi_{(\lambda)}, {\varphi_{(\lambda)}}^2, {\varphi_{(\lambda)}}^3, \dots$ oraz ich rzędy aż do ustabilizowania rzędu, czyli aż nastąpi $\dim\ker {\varphi_{(\lambda)}}^k = \dim\ker {\varphi_{(\lambda)}}^{k+1}$ dla pewnego k.
Wówczas rysunek sznurków ma k poziomów, przy czym:
— na pierwszym poziomie jest $\dim\ker \varphi_{(\lambda)}$ wektorów;
— na i-tym poziomie (dla $i > 1$) jest $\dim\ker {\varphi_{(\lambda)}}^i - \dim\ker {\varphi_{(\lambda)}}^{i-1}$ wektorów.
To pozwala odtworzyć kształt sznurków.

Dla $\lambda = 2$: Przekształcenie $\varphi_{(2)}$ ma w bazach standardowych macierz $A_{(2)} = A - 2I$. Obliczamy jej potęgi (ręcznie — normalne przykłady mają wielkość 3×3, a nie 7×7, więc się da); oto ich rzędy:

$$r(A_{(2)}) = 5, \qquad r({A_{(2)}}^2) = 3, \qquad r({A_{(2)}}^3) = 2, \qquad r({A_{(2)}}^4) = 2,$$

zatem stabilizacja nastąpiła dla $k = 3$. Powyższe równości tłumaczą się na

$$\dim\ker \varphi_{(2)} = 7 - 5 = 2, \qquad \dim\ker {\varphi_{(2)}}^2 = 7 - 3 = 4, \qquad \dim\ker {\varphi_{(2)}}^3 = 7 - 2 = 5,$$

zatem liczba wektorów na kolejnych poziomach wynosi $2, 2, 1$, co prowadzi do rysunku o takim kształcie:

$$\varphi_{(2)}:\ \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \uparrow & \uparrow \\ \bullet & \bullet \\ \uparrow & \uparrow \\ \bullet & \bullet \\ \uparrow & \\ \bullet & \end{array}}$$

Dla $\lambda = -1$: Analogicznie stwierdzamy, że

$$\dim \ker \varphi_{(-1)} = 1, \qquad \dim \ker {\varphi_{(-1)}}^2 = 2, \qquad \dim \ker {\varphi_{(-1)}}^3 = 2,$$

zatem mamy po jednej kropce na poziomach 1 i 2, czyli

$$\varphi_{(-1)}:\ \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \bullet \end{array}}$$

3. Na podstawie kształtu sznurków można już ustalić, jak wygląda macierz J. Jednak najczęściej należy też wyznaczyć bazę $\mathcal{C}$ lub (co na jedno wychodzi) macierz C; w takim wypadku musimy wykonać następne kroki.

W naszym przykładzie otrzymujemy w bazie $\mathcal{C} = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$ macierz

$$J = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & \\ & & 2 & & & & \\ \hline & & & 2 & 1 & & \\ & & & & 2 & & \\ \hline & & & & & -1 & 1 \\ & & & & & & -1 \end{array}\right],$$

o ile w rysunkach sznurków ponumerujemy wektory następująco:

$$\varphi_{(2)}:\ \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ \uparrow & \uparrow \\ \bullet\gamma_1 & \bullet\gamma_4 \\ \uparrow & \uparrow \\ \bullet\gamma_2 & \bullet\gamma_5 \\ \uparrow & \\ \bullet\gamma_3 & \end{array}} \qquad \varphi_{(-1)}:\ \boxed{\begin{array}{c} 0 \\ \uparrow \\ \bullet\gamma_6 \\ \uparrow \\ \bullet\gamma_7 \end{array}}$$

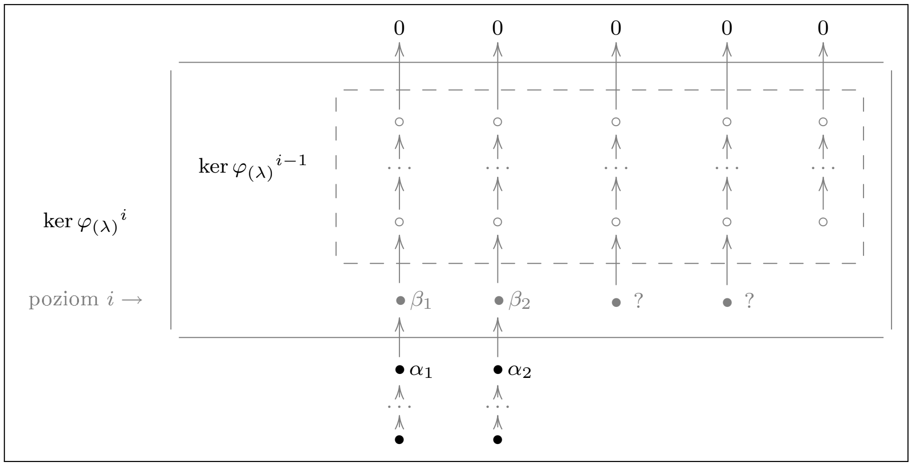
Można też ponumerować inaczej i otrzymać inną macierz J (z inną kolejnością klatek). Jednak żeby otrzymana macierz była jordanowska, trzeba w obrębie każdego sznurka przydzielić ciąg kolejnych numerów, rosnący z góry w dół.

4. Szukamy teraz wektorów γ_i, pamiętając o uwagach z przymiarki. Można na przykład znajdować je począwszy od dołu:

— Na poziomie k wybieramy jakiekolwiek dopełnienie bazy $\ker {\varphi_{(\lambda)}}^{k-1}$ do bazy $\ker {\varphi_{(\lambda)}}^k$;

— Na poziomie i (dla $i < k$) wektory niekończące sznurków są wyznaczone jako obrazy swoich niższych sąsiadów przy $\varphi_{(\lambda)}$.
Wektory kończące sznurki wyznaczamy poprzez dopełnienie do bazy $\ker {\varphi_{(\lambda)}}^i$ układu zawierającego bazę $\ker {\varphi_{(\lambda)}}^{i-1}$ (o ile $i > 1$) oraz wyznaczone wcześniej wektory niekończące

na poziomie i. To znowu dobrze widać na rysunku:



Rysunek przedstawia wyznaczanie wektorów na poziomie i. Czarne kropki oznaczają wektory już nam znane; szare będziemy właśnie wyznaczać; białe znajdziemy później. Niemniej wiemy już, jakie przestrzenie są rozpięte przez wektory białe oraz biało-szare, co nam się przyda.
Wektory β_1, β_2 nie kończą sznurków, zatem obliczamy $\beta_1 = \varphi_{(\lambda)}(\alpha_1)$ oraz $\beta_2 = \varphi_{(\lambda)}(\alpha_2)$. Natomiast dwa pozostałe wektory, oznaczone znakami zapytania, wyznaczamy dopełniając do bazy $\ker \varphi_{(\lambda)}^{i}$ (duża ramka) układ złożony z wyznaczonych już wektorów β_1, β_2 oraz *pewnej* bazy $\ker \varphi_{(\lambda)}^{i-1}$ (mała ramka).

Dla $\lambda = 2$: Na początek wyznaczmy bazy jąder kolejnych potęg $\varphi_{(2)}$:

$$\begin{aligned}
\ker \varphi_{(2)} &= \operatorname{lin}\big((0,0,0,1,0,0,0),\ (-1,0,-2,0,0,0,1)\big),\\
\ker \varphi_{(2)}{}^2 &= \operatorname{lin}\big((0,0,0,1,0,0,0),\ (-1,0,-2,0,0,0,1),\ (1,0,2,0,1,0,0),\ (1,-1,2,0,0,1,0)\big),\\
\ker \varphi_{(2)}{}^3 &= \operatorname{lin}\big((0,0,0,1,0,0,0),\ (1,0,0,0,0,0,1),\ (-1,-1,0,0,0,1,0),\ (-1,0,0,0,1,0,0),\ (1,0,1,0,0,0,0)\big).
\end{aligned}$$

Poziom 3. Wybieramy γ_3 jako dopełnienie bazy $\ker \varphi_{(2)}{}^2$ do bazy $\ker \varphi_{(2)}{}^3$: na przykład $(1,0,0,0,0,0,1)$.
Poziom 2. Obliczamy $\gamma_2 = \varphi_{(2)}(\gamma_3) = (0,-2,0,2,-2,2,0)$. Wybieramy γ_5 jako dopełnienie układu złożonego z γ_2 oraz bazy $\ker \varphi_{(2)}$ do bazy $\ker \varphi_{(2)}{}^2$: na przykład $(1,0,2,0,1,0,0)$.
Poziom 1. Obliczamy $\gamma_1 = \varphi_{(2)}(\gamma_2) = (-2,0,-4,0,0,0,2)$ oraz $\gamma_4 = \varphi_{(2)}(\gamma_5) = (0,0,0,1,0,0,0)$.
Dla $\lambda = -1$: Tu będzie dużo przyjemniej:

$$\begin{aligned}
\ker \varphi_{(-1)} &= \operatorname{lin}\big((0,0,0,0,0,1,0)\big),\\
\ker \varphi_{(-1)}{}^2 &= \operatorname{lin}\big((0,0,0,0,0,1,0),\ (0,0,0,0,0,0,1)\big).
\end{aligned}$$

Poziom 2. Wybieramy γ_7 jako dopełnienie bazy $\ker \varphi_{(-1)}$ do bazy $\ker \varphi_{(-1)}{}^2$: na przykład $(0,0,0,0,0,0,1)$.

Poziom 1. Obliczamy $\gamma_6 = \varphi_{(-1)}(\gamma_7) = (0,0,0,0,0,1,0)$.

5. Możemy teraz udzielić pełnej odpowiedzi postaci: “J jest macierzą φ w bazie $\mathcal{C}$”, gdzie J, $\mathcal{C}$ są takie, jak znaleźliśmy, lub “$A = CJC^{-1}$”, gdzie C jest macierzą mającą w kolumnach kolejne wektory γ_i.