GAL II 2012/13 — zadania z gwiazdką

Aleksander Zabłocki

9 kwietnia 2013

Macierze Jordana

1. (przedawnione) Niech $\varphi : V \to V$ będzie jordanizowalnym endomorfizmem przestrzeni skończenie wymiarowej nad ciałem K. Dla $\lambda \in K$ oznaczmy przez $\tilde{V}_{(\lambda)}$ podprzestrzeń V rozpiętą przez wszystkie *(nie tylko własne)* wektory z bazy Jordana dla φ, związane z wartością własną λ. Oznaczmy też przez $C_\varphi(\alpha)$ podprzestrzeń φ-cykliczną dla α, tzn. $\operatorname{lin}\big(\alpha, \varphi(\alpha), \varphi^2(\alpha), \dots\big)$. Udowodnij, że jeśli

$$\alpha = \sum_\lambda \alpha_{(\lambda)},$$

gdzie $\alpha_{(\lambda)} \in \tilde{V}_{(\lambda)}$, to

$$C_{\varphi(\alpha)} = \bigoplus_\lambda C_\varphi(\alpha_{(\lambda)}).$$

2. (przedawnione) Wywnioskuj z zadania 1, że (używając tamtejszych oznaczeń) dla dowolnej φ-niezmienniczej podprzestrzeni $W \subseteq V$ zachodzi

$$W = \bigoplus_\lambda \big(W \cap \tilde{V}_{(\lambda)}\big).$$

3. Udowodnij *(nie korzystając z rozkładu Frobeniusa)*, że jeśli ciało K jest nieskończone, to dowolne macierze $A, B \in M_{n\times n}(K)$ podobne nad pewnym ciałem $L \supseteq K$ są też podobne nad K.

4. *(Motyw przewodni: "każde ciało można domknąć")*
Niech $A \in M_{n\times n}(K)$ i niech $K[A]$ oznacza zbiór wszystkich macierzy B takich, że $B = f(A)$ dla pewnego wielomianu f o współczynnikach z K.
a) Udowodnij, że jeśli wielomian minimalny dla A jest nierozkładalny, to $K[A]$ z działaniami dodawania i mnożenia macierzy jest ciałem. (Uwaga na przemienność mnożenia!)
b) Przy powyższym założeniu wskaż w $K[A]$ podciało *izomorficzne* z K.
(*Izomorfizm* ciał to bijekcja zachowująca zero, jedynkę, dodawanie i mnożenie)
c) Udowodnij, że dla dowolnego ciała K oraz wielomianu f o współczynnikach z K niemającego pierwiastków istnieje ciało $L \supseteq K$ takie, że f ma pierwiastek w L.
d) Udowodnij, że istnieje takie ciało $L \supseteq K$, że macierz A jordanizuje się nad L.

5. Niech A będzie klatką Jordana dla wartości $\lambda \neq 0$ nad dowolnym ciałem. Udowodnij, że dla dowolnego $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ macierz A^k jest podobna do $\lambda^{k-1} \cdot A$.

6. Niech $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ oraz $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Udowodnij, że istnieje macierz B taka, że $B^k = A$.

Przestrzenie afiniczne

7. Niech E będzie skończenie wymiarową przestrzenią afiniczną i niech $f : E \to E$ będzie przekształceniem afinicznym, niebędącym izomorfizmem.
a) Udowodnij, że istnieje podprzestrzeń $E' \subsetneq E$ różna od E taka, że $f(E') = E'$.
b) Czy zawsze istnieje podprzestrzeń $E' \subsetneq E$ różna od E taka, że $f^{-1}(E') = E'$?

8. Niech E_1, E_2 będą dowolnymi *(niekoniecznie skończenie wymiarowymi :)* przestrzeniami afinicznymi. Czy aby przekształcenie $f : E_1 \to E_2$ było afiniczne wystarczy, żeby zachowywało takie kombinacje afiniczne, w których wszystkie współczynniki są ≥ 0?
(Takie kombinacje nazywa się zazwyczaj wypukłymi)

Oznaczenie. Niech $A(E_1, E_2)$ oznacza zbiór przekształceń afinicznych z E_1 do E_2. *(Z wykładu wiadomo, że jest to przestrzeń afiniczna wymiaru* $(\dim E_1 + 1) \cdot \dim E_2$*)* Przez analogię do definicji przestrzeni liniowej sprzężonej ($V^* = L(V, K)$) zdefiniujmy "afiniczną przestrzeń sprzężoną" $E^\Delta = A(E, K)$.

9. *(Motyw przewodni: "nie wszystko tłumaczy się wprost")*
Niech $\dim E < \infty$ i niech $J : E \to E^{\Delta\Delta}$ będzie zadane wzorem

$$\big(J(p)\big)(\varphi) = \varphi(p)$$

a) Udowodnij, że J jest afiniczne i różnowartościowe, ale nie jest izomorfizmem.
b) Dopełnij bazę punktową $\operatorname{im} J$ do bazy punktowej $E^{\Delta\Delta}$.

Oznaczenie. Jeśli $f : E_1 \to E_2$ jest afiniczne, definiujemy "afiniczne przekształcenie sprzężone" $f^\Delta : E_2^\Delta \to E_1^\Delta$ wzorem

$$f^\Delta(\varphi) = \varphi \circ f.$$

10. Niech $\overline{\mathcal{A}} : \alpha_1, \ldots, \alpha_n; p$ będzie układem bazowym przestrzeni E. Wymyśl definicję układu bazowego $\overline{\mathcal{A}}^\Delta$ w przestrzeni E^Δ tak, aby dla dowolnego $f : E_1 \to E_2$ oraz (skończonych) układów bazowych $\overline{\mathcal{A}}_i$ w E_i ($i = 1, 2$) zachodził naturalny związek między macierzami

$$M(f^\Delta)^{\overline{\mathcal{A}}_1^\Delta}_{\overline{\mathcal{A}}_2^\Delta}, \qquad M(f)^{\overline{\mathcal{A}}_2}_{\overline{\mathcal{A}}_1}.$$

Opisz ten związek. *(Nie musisz go dowodzić)*