Egzamin z GAL-u, 5 września 2005, temat A

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być:
- imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu,
- numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszczała,
- numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

1. Rozpatrzmy endomorfizm $\varphi : \mathrm{R}^4 \to \mathrm{R}^4$ zadany wzorem $\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (2x_1 + x_2 + x_3, 2x_2, 4x_2 + x_3 - x_4, -4x_2 + x_3 + 3x_4)$.
a) Znaleźć wartości własne i bazy przestrzeni własnych endomorfizmu φ.
b) Znaleźć postać Jordana macierzy $M(\varphi)_{\mathrm{st}}$.
c) Dla jakich wartości parametru $t \in \mathrm{R}$ macierz $A_t = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & t & 5 & 2 \end{bmatrix}$ jest podobna do macierzy $M(\varphi)_{\mathrm{st}}$?

2. W R^3 ze standardowym iloczynem skalarnym rozpatrzmy: punkt $q = (2, 1, -1)$, prostą L o parametryzacji $(1, 1, 2) + t(0, 1, 3)$ i płaszczyznę M opisaną równaniem $x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$. Znaleźć:
a) rzut prostopadły punktu q na prostą L,
b) parametryzację obrazu prostej L w symetrii prostopadłej względem płaszczyzny M,
c) wartości parametru $s \in \mathrm{R}$ dla których przekształcenie $f_s : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$, $f_s((x_1, x_2, x_3)) = (-x_3, sx_2, x_1)$ jest izometrią.

3. Rozpatrzmy formę dwuliniową $g : \mathrm{R}^3 \times \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}$, $g((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_3$.
a) Znaleźć bazę przestrzeni R^3 prostopadłą względem formy g.
b) Niech $B_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & s \end{bmatrix}$. Dla jakich wartości parametru $s \in \mathrm{R}$ macierz B_s jest macierzą formy g w pewnej bazie przestrzeni R^3 ?
c) Znaleźć maksymalny wymiar podprzestrzeni w R^3 nieosobliwej względem formy g. Podać przykład takiej podprzestrzeni.

4. Niech X będzie hiperpowierzchnią w R^3 zadaną równaniem $2x_1x_2 + x_3 + 1 = 0$.
a) Określić typ afiniczny hiperpowierzchni X.
b) Czy X jest afinicznie izomomorficzna z hiperpowierzchnią Y zadaną równaniem $2x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + x_3 + 2 = 0$?
c) Niech hiperpowierzchnia $X_{s,t}$ w R^3 będzie zadana równaniem $x_1^2 + tx_2^2 + sx_3 = 0$, gdzie $s, t \in \mathrm{R}$. Opisać wszystkie typy afiniczne $X_{s,t}$ w zależności od s, t.

5. Niech H będzie przestrzenią euklidesową afiniczną wymiaru ≥ 3 i niech L_1, L_2 będą prostymi w H.
a) Wykazać, że istnieją równoległe płaszczyzny M_1, M_2 w H takie, że $L_1 \subset M_1$, $L_2 \subset M_2$.
b) Wykazać, że istnieje taka prosta K w H, że K przecina L_1, przecina L_2 i jest prostopadła do L_1 i do L_2.