GAL potok 1, semestr letni, egzamin poprawkowy, 03.09.2008,

1. Dany jest endomorfizm $\varphi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, $\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = = (x_1 + 2x_2 + x_4, -x_1 + 4x_2 + x_4, 3x_1 - 3x_2 + 3x_3, 2x_4)$ oraz macierze $A = M(\varphi)_{\text{st}}$ i $B_s = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & s \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Znaleźć wartości endomorfizmu φ oraz bazy odpowiadających im przestrzeni własnych.
b) Dla jakich $s \in \mathbf{R}$ macierze A i B_s są podobne?
c) Znaleźć postać Jordana macierzy A^3.

2. W przestrzeni afinicznej $\mathbf{R}^4$ dane są punkty $p_0 = (1,0,0,0), p_1 = (0,1,0,0), p_2 = (1,1,1,0), p_3 = (0,0,1,1)$. Niech $H = \text{af}(p_0, p_1, p_2, p_3)$.
a) Znaleźć równanie opisujące hiperpłaszczyznę H.
b) Znaleźć parametryzację prostej $L \subset \mathbf{R}^4$ zawierającej punkt $(3,1,4,5)$ i równoległej do hiperpłaszczyzny H i do płaszczyzny M opisanej układem równań $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 &= 2 \\ x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \end{cases}$.
c) Niech $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ będzie przekształceniem afinicznym takim, że $f((0,0,0,0)) = (1,0,0,0)$ oraz $\forall p \in H \; f(p) = (1,1,0,0)$. Znaleźć wzór na przekształcenie f.

3. W przestrzeni afinicznej $\mathbf{R}^3$ dany jest standardowy iloczyn skalarny. Niech $L = (1,0,3) + \text{lin}((1,2,0))$.
a) Znaleźć rzut prostopadły punktu $(1,1,1)$ na prostą L.
b) Dla jakich $r \in \mathbf{R}$ przekształcenie $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f((x_1, x_2, x_3)) = \frac{1}{2}(x_1 + \sqrt{3}x_3 + 4, 2x_2 + 2, rx_1 + x_3 + 6)$ jest izometrią?
c) Znaleźć wzór na odległość punktu $p = (t, 0, 0)$ of prostej L (w zależności od t).

4. Dana jest forma kwadratowa $q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $q((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 + \frac{3}{2}x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$.
a) Znaleźć postać diagonalną formy q.
b) Zbadać, czy forma q jest dodatnio określona.
c) Dla jakich $t \in \mathbf{R}$ forma q jest równoważna formie $p : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $p((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 + x_2^2 + tx_3^2 + 4x_1x_2$?

5. Niech (V, h) będzie nieosobliwą dwuwymiarową przestrzenią dwuliniową nad ciałem K.
a) Wykazać, że jeśli $\text{char}K \neq 2$ oraz (V, h) jest płaszczyzną hiperboliczną, to dla każdego niezerowego $a \in K$ istnieje baza prostopadła α_1, α_2 przestrzeni V taka, że $h(\alpha_1, \alpha_1) = a$, $h(\alpha_2, \alpha_2) = -a$.
b) Wykazać, że jeśli $\text{char}K \neq 2$ i V posiada niezerowy wektor izotropowy, to (V, h) jest płaszczyzną hiperboliczną.
c) Wykazać, że powyższe zdania a) i b) przestają być prawdziwe, jeśli opuścić założenie, że $\text{char}K \neq 2$.