GAL, potok I

egzamin, 3 września 2007

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce.
Na każdej kartce z rozwiązaniem powinno być imię i nazwisko osoby zdającej, jej numer indeksu oraz numer rozwiązywanego zadania.

Zadanie 1

Niech $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Znaleźć wartości własne macierzy A i odpowiadające im wektory własne.
(b) Znaleźć postać Jordana macierzy A oraz macierzy A^5.
(c) Obliczyć A^{111}.

Zadanie 2

W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym dane są płaszczyzna M opisana równaniem $x_1 - x_2 + x_3 = 2$ oraz prosta $L : (0,1,1) + \mathrm{lin}((-1,1,0))$.

(a) Znaleźć parametryzację płaszczony M oraz układ równań opisujący prostą L.
(b) Znaleźć rzut prostopadły prostej L na płaszczyznę M.
(c) Znaleźć parametryzację płaszczyzny prostopadłej do M i zawierającej L.

Zadanie 3

Niech $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie formą dwuliniową na $\mathbb{R}^3$, która w bazie standardowej $\mathbb{R}^3$ ma macierz $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & t & 0 \\ 1 & 0 & t-1 \end{bmatrix}$ i niech $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie formą kwadratową na $\mathbb{R}^3$ odpowiadającą formie dwuliniowej h.

(a) Policzyć sygnaturę formy h w zależności od wartości parametru t.
(b) Dla jakich wartości parametru t forma h jest iloczynem skalarnym?
(c) Określić typ afiniczny hiperpowierzchnii opisanej równaniem $q(x_1, x_2, x_3) = 2$ w zależności od wartości parametru t. Dla każdego otrzymanego typu zrobić rysunek.

Zadanie 4

Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową, gdzie $h : V \times V \to K$ jest formą dwuliniową symetryczną i V jest przestrzenią liniową nad ciałem K o charakterystyce $\neq 2$.

(a) Pokazać, że jeżeli α i β są wektorami izotropowymi to dla każdej pary skalarów $a, b \in K$ wektory $a\alpha + b\beta$ i $a\alpha - b\beta$ są prostopadłe.
(b) Pokazać, że zbiór wektorów izotropowych przestrzeni V jest podprzestrzenią liniową V wtedy i tylko wtedy gdy każdy wektor izotropowy należy do $V^\perp$.
(c) Pokazać, że jeśli h jest nieosobliwa i $\dim V = 2$, to istnienie izotropowego wektora $\alpha \neq 0$ jest równoważne istnieniu takiej bazy przestrzeni V, że macierz formy h ma w tej bazie postać $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.