A

EGZAMIN Z ALGEBRY LINIOWEJ, SEMESTR LETNI (WRZESIEŃ) 2003

## CZĘŚĆ I. ZADANIA

1. Niech $f: \mathbb{C}^3 \mapsto \mathbb{C}^3$ będzie odwzorowaniem liniowym o macierzy $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \\ -3 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ w bazie standardowej.
(a) Znaleźć macierz Jordana $A_J$ przekształcenia $f$ oraz bazę w której macierz $f$ ma postać Jordana
(b) Czy istnieje baza w $\mathbb{C}^3$ w której $f$ ma macierz $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

2. Niech $E = E(\mathbb{R}^3)$ będzie afiniczną przestrzenią euklidesową ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle\ |\ \rangle$ i $H$ podprzestrzenią opisaną równaniem $x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 1 = 0$.
(a) Znaleźć bazę prostopadłą unormowaną przestrzeni $S(H)$ wektorów swobodnych.
(b) Znaleźć przedstawienie parametryczne prostej $L$ prostopadłej do $H$ i zawierającej punkt $[3, 5, -2]$
(c) Znaleźć układ równań opisujących $L$.
(d) Znaleźć odległość punktu $[0, 0, 0]$ od prostej $L$.

3. Dana jest przestrzeń ortogonalna $(\mathbb{R}^3, \xi)$ z formą 2-liniową daną wzorem $\xi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + x_2y_2 + x_1y_3 + x_3y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 - 2x_3y_3$.
(a) Sprawdzić czy przestrzeń ta jest przestrzenią euklidesową.
(b) Znaleźć bazę prostopadłą na wpół unormowaną przestrzeni $(\mathbb{R}^3, \xi)$.
(c) Sprawdzić czy $\mathrm{lin}\{(1,1,1)\} \perp M$, gdzie $M$ jest podprzestrzenią opisaną równaniem $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

4. Niech dana będzie przestrzeń euklidesowa $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle\ |\ \rangle$ i odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dane wzorem $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 - x_2, -x_1 + x_2 + x_3, x_2 + 2x_3)$. Sprawdzić czy $f$ jest przekształceniem samosprzeżonym. Jeśli tak, znaleźć bazę prostopadłą i unormowaną w której $f$ na postać diagonalną.

5. Niech $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ będą zbiorami algebraicznymi opisanymi równaniami $4x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_2 - 2x_3 + 1 = 0$ i $-x_3^2 - x_1x_2 - 2x_2x_3 + x_3 = 0$, odpowiednio. Sprawdzić, czy zbiory $A_1$ i $A_2$ są afinicznie równoważne.

## CZĘŚĆ II. TEORIA

1. Podaj przykłady bazy punktowej i układu bazowego w $\mathbb{R}^3$. Odpowiedź uzasadnij.
2. Podaj definicję przekształcenia euklidesowego i jego macierzową charakteryzację.
3. Niech $f : E \to E$ będzie automorfizmem afinicznym $n$-wymiarowej przestrzeni euklidesowej i $A$ $n$-wymiarowym równoległościanem w $E$ o objętości $o(A)$. Jaka jest objętość równoległościanu $f(A)$?
4. Podaj przykłady dwóch różnych orientacji przestrzeni liniowej $\mathbb{R}^3$. Odpowiedź uzasadnij.

**Każde zadanie należy pisać na oddzielnej kartce.**
**Część II należy traktować jako jedno zadanie.**

Punktacja:
zadania z części I po 10 punktów
zadania z części II po 5 p.
Razem 70 p.