GAL, egzamin poprawkowy, 13.09.2001

1. Niech endomorfizm $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie dany wzorem
$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - 2x_2,\ x_1 + 4x_2,\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3)$.

a) Znaleźć wartości własne i bazy przestrzeni własnych endomorfizmu φ.

b) Czy macierz $A = M(\varphi)_{st}^{st}$ jest diagonalizowalna nad $\mathbb{R}$? Jeśli tak, to znaleźć taką macierz odwracalną $C \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$, że macierz $C^{-1}AC$ jest diagonalna.

c) Czy istnieje taka baza $\mathcal{B}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, że $M(\varphi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$? Jeśli tak, to podać przykład takiej bazy.

2. Niech forma dwuliniowa $\xi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie zadana wzorem
$\xi((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_2y_3 + 3x_3y_2 + x_3y_3$.

a) Znaleźć bazę ortogonalną przestrzeni $(\mathbb{R}, \xi)$.

b) Czy ξ jest iloczynem skalarnym? Czy istnieje taka baza $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$, że $M(\xi; \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

c) Znaleźć taki wektor $\beta = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$, że funkcjonał liniowy $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zadany wzorem $\psi((x_1, x_2, x_3)) = \xi((x_1, x_2, x_3), (b_1, b_2, b_3))$ ma w bazie sprzężonej do $\{(1, 1, -1), (-2, 0, 1), (0, -1, 1)\}$ współrzędne $10, 4, -3$.

3. Niech $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$ i niech H będzie podprzestrzenią afiniczną $\mathbb{R}^3$ złożoną ze wszystkich prostych zawierających punkt $(1, 2, 3)$ i równoległych do V.

a) Znaleźć parametryzację przestrzeni H.

b) W $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym znaleźć układ równań opisujący prostą będącą rzutem prostopadłym prostej $L = \{(1, 1, 1) + t(2, 1, 1) : t \in \mathbb{R}\}$ na H.

c) Określić typ afiniczny hiperpowierzchni $Y \subset H$ zadanej warunkiem
$Y = H \cap \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 3x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 = 12\}$.

4. Niech φ będzie endomorfizmem n-wymiarowej przestrzeni liniowej V nad ciałem K.

Rozważmy warunki:
(i) V ma bazę złożoną z wektorów własnych φ,
(ii) suma wymiarów wszystkich przestrzeni własnych odpowiadających różnym wartościom własnym φ jest równa n,
(iii) dla każdej podprzestrzeni $W \subset V$ takiej, że $\varphi(W) \subset W$ istnieje podprzestrzeń $Z \subset V$ taka, że $W \oplus Z = V$ i $\varphi(Z) \subset Z$.

a) Wykazać, że warunki (i) i (ii) są równoważne.

b) Wykazać, że jeśli K jest algebraicznie domknięte, to (iii) implikuje (i).

c) Wykazać, że (i) implikuje (iii) dla dowolnego K.