GAL, egzamin 17.06.2011

Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach).
Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE), numer indeksu osoby zdającej, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

TEMAT B

1. Dane są rzeczywiste macierze

$$A_{(r,s)} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 0 & 0 \\ r & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & s \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \text{ i } B_{(t,u)} = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & u & 0 & -4 \end{pmatrix}, C_{(r,s)} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 0 & 1 \\ r & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & s \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix},$$

gdzie $r, s, t, u \in \mathbb{R}$.

(a) W przestrzeni euklidesowej liniowej $\mathbb{R}^4$ że standardowym iloczynem skalarnym $\langle\ ,\rangle$, dany jest endomorfizm $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ taki, że $M(\varphi)^{St}_{St} = A_{(-3,3)} = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, gdzie St jest bazą standardową. Znaleźć bazę ortogonalną przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^4, \langle\ ,\rangle)$ w której φ ma macierz diagonalną.

(b) Dany jest endomorfizm $\psi\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ taki, że $M(\psi)^{St}_{St} = A_{(0,0)}$. Dla jakich wartości parametrów $t, u \in \mathbb{R}$ istnieje baza $\mathcal{A}_{(t,u)}$ taka, że $M(\psi)^{\mathcal{A}_{(t,u)}}_{\mathcal{A}_{(t,u)}} = B_{(t,u)}$? Odpowiedź uzasadnić.

(c) Dla jakich wartości parametrów r, s macierz $C_{(r,s)}$ jest diagonalizowalna nad $\mathbb{R}$? Odpowiedź uzasadnić.

2. W przestrzeni afinicznej euklidesowej $\mathbb{R}^3$ że standardowym iloczynem skalarnym $\langle\ ,\rangle$ dane jest przekształcenie $\varphi_{rs}\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ wzorem

$$\varphi_{(r,s)}((x_1,x_2,x_3)) = (\tfrac{r}{3}x_1 - \tfrac{2}{3}x_2 - \tfrac{1}{3}x_3, \tfrac{2}{3}x_1 + \tfrac{1}{3}x_2 + \tfrac{2}{3}x_3 + 1, \tfrac{s}{3}x_1 + \tfrac{2}{3}x_2 - \tfrac{2}{3}x_3 + 1), \text{ gdzie } r, s \in \mathbb{R}.$$

(a) Dla jakich wartości parametrów $r, s \in \mathbb{R}$ przekształcenie $\varphi_{(r,s)}$ jest izometrią?

(b) Dany jest równoległościan $R \subseteq \mathbb{R}^3$ o objętości 54. Znaleźć objętość obrazu $\varphi_{(1,-3)}(R)$ tego równoległościanu przy przekształceniu $\varphi_{(1,-3)}$.

(c) Dla jakich wartości parametru $s \in \mathbb{R}$ przekształcenie $\varphi_{1,s}$ zmienia orientację ale zachowuje objętość 3-wymiarowych równoległościanów? Odpowiedź uzasadnić.

3. W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle\ ,\rangle$, dana jest płaszczyzna $M = \{(x_1,x_2,x_3)\colon\ x_1 - x_2 - x_3 = 1\}$ i prosta $L = (0,-1,0) + lin(1,0,1) \subseteq M$.

(a) Znaleźć rzut prostopadły prostej $K = (1,0,3) + lin\{(-2,1,3)\}$ na płaszczyznę M.

(b) Ile jest zachowujących orientację izometrii φ przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\rangle)$ takich, że dla każdego $p \in L$, $\varphi(p) = p$ oraz dla każdego $q \in M$, $\varphi(q) \in M$? Każdą taką izometrię opisać, podając jej wartości na dowolnie wybranej bazie punktowej przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

(c) Dane są dwie proste $L_1 = (0,0,2) + lin\{(1,0,0)\}$ i $L_2 = (1,0,0) + lin\{(0,1,0)\}$. Ile jest izometrii f przestrzeni euklidesowej afinicznej $(\mathbb{R}^3, \langle\ ,\rangle)$ takich, że $f(L_1) = L_2$ i $f(L_2) = L_1$. Odpowiedź uzasadnić.

4. Funkcjonał dwuliniowy symetryczny $h\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ dany jest warunkiem $G(h, \mathcal{S}t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, gdzie $\mathcal{S}t$ jest bazą standardową.

   (a) Czy istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni dwuliniowej $(\mathbb{R}^4, h)$ taka, że $G(h, \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$? Odpowiedź uzasadnić.

   (b) Podać przykład 2-wymiarowej podprzestrzeni W takiej, że $h_{|W}$ jest iloczynem skalarnym na W. Znaleźć bazę ortogonalną $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ przestrzeni dwuliniowej $(\mathbb{R}^4, h)$ taką, że $\alpha_3, \alpha_4 \in W$.

   (c) Podać przykład izotropowej 1-wymiarowej podprzestrzeni U przestrzeni dwuliniowej $(\mathbb{R}^4, h)$ (tzn. dla dowolnego $\alpha \in U$, $h(\alpha, \alpha) = 0$). Czy istnieje izotropowa 2-wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni dwuliniowej $(\mathbb{R}^4, h)$? Odpowiedź uzasadnić.

5. Niech K będzie ciałem charakterystyki $\neq 2$ i niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem K.

   (a) Niech $\alpha \in V$ będzie niezerowym wektorem spełniającym $h(\alpha, \alpha) = 0$. Wykazać, że jeśli istnieje wektor $\beta \in V$ taki, że $h(\alpha, \beta) \neq 0$, to istnieje wektor $\beta' \in V$, $\beta' \neq 0$ taki, że $\beta' \neq \alpha$, $h(\beta', \beta') = 0$.

   (b) Wykazać, że dla każdych $a, b \in K$, $a \neq 0$ macierze $\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ są kongruentne nad K.

   (c) Wykazać, że jeśli (V, h) jest nieosobliwa i $\dim V = 3$, to dla każdych baz prostopadłych $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ przestrzeni (V, h) istnieje ciąg $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_r$ baz prostopadłych przestrzeni (V, h) taki, że $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1$, $\mathcal{A}' = \mathcal{B}_r$ oraz dla każdego $i = 1, \ldots, r-1$ bazy $\mathcal{B}_i$ i $\mathcal{B}_{i+1}$ mają wektor wspólny.

6. Funkcja $f_r\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f_r((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_1 + 2x_2 + rx_3$, gdzie $r \in \mathbb{R}$. Niech $X_r = \{(x_1, x_2, x_3)\colon f_r((x_1, x_2, x_3)) = 0\}$ oraz niech $M = \{(x_1, x_2, x_3)\colon x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$.

   (a) Określić typ afiniczny (oraz podać nazwę i naszkicować rysunek) hyperpowierzchni X_r w zależności od wartości parametru $r \in \mathbb{R}$.

   (b) Czy istnieje układ bazowy w $\mathbb{R}^3$ w którym powierzchnia X_0 jest opisana równaniem $u_1^2 - u_2^2 + u_3 = 0$? Jeśli tak, to podać przykład takiego układu bazowego.

   (c) Określić typ afiniczny krzywej $M \cap X_0$.