

GAL, egzamin, 14.06.2004, Temat B

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce. Na każdej kartce powinno być: imię i nazwisko osoby zdającej oraz jej numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej do której osoba zdająca uczęszcza, numer rozwiązywanego zadania oraz litera tematu.

1. Endomorfizm  $\varphi_t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  jest dany wzorem  $\varphi_t((x_1, x_2, x_3)) = (5x_1, tx_1 + x_2 - 2x_3, t^2x_1 - 2x_2 + 4x_3)$ .

- Znaleźć wartości własne i bazy przestrzeni własnych endomorfizmu  $\varphi_2$ .
- Dla jakich  $t \in \mathbb{R}$  endomorfizm  $\varphi_t$  jest diagonalizowalny?
- Dla jakich  $t \in \mathbb{R}$  istnieje taka macierz ortogonalna  $C_t \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ , że macierz  $C_t^{-1}M(\varphi_t)_{st}C_t$  jest diagonalna? Dla każdego takiego  $t$  znaleźć macierz  $C_t$ .

2. W  $\mathbb{R}^3$  zadany jest standardowy iloczyn skalarny,  $p = (3, -1, 2)$ ,  $L = (2, 0, -3) + \text{lin}((1, 2, 2))$ ,  $H : 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$ .

- Znaleźć rzut prostopadły punktu  $p$  na płaszczyznę  $H$ .
- Znaleźć wszystkie punkty, które można otrzymać jako obrazy punktu  $p$  w izometriach  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  takich, że  $f(q) = q$  dla każdego  $q \in H$ .
- Pokazać, że prosta  $L$  jest leży na płaszczyźnie  $H$ . Znaleźć wszystkie punkty, które można otrzymać jako obrazy punktu  $p$  w izometriach  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  takich, że  $f(q) = q$  dla każdego  $q \in L$  oraz  $f(H) = H$ .

3. Forma dwuliniowa  $h_t$  na przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  dana jest wzorem  $h_t((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = tx_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + 3x_3y_3$ .

- Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni  $(\mathbb{R}^3, h_1)$ .
- Znaleźć macierz diagonalną, o wyrazach w  $\{1, -1, 0\}$ , kongruentną nad  $\mathbb{R}$  do  $G(h_1; st)$ .
- Dla jakich  $t \in \mathbb{R}$  forma  $h_t$  jest nieosobliwa? Dla jakich  $t \in \mathbb{R}$  forma  $h_t$  jest iloczynem skalarnym? Obliczyć sygnaturę macierzy  $G(h_t; st)$  w zależności od  $t \in \mathbb{R}$ .

4. Niech  $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 12x_3 + 2 = 0\}$ .

- Określić typ afiniczny hiperpowierzchni  $X$ .
- Znaleźć środki symetrii hiperpowierzchni  $X$ .
- Niech  $Y_r = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 3x_2^2 - rx_3^2 + r - 4 = 0\}$ . Dla jakich  $r \in \mathbb{R}$  istnieje taki izomorfizm afiniczny  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , że  $f(Y_r) = X$ ?

5. Niech  $V$  będzie przestrzenią liniową nad  $\mathbb{R}$  i niech  $h : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  będzie formą dwuliniową symetryczną nieosobliwą.

- Niech  $\dim V = 2$ . Wykazać, że jeśli  $V$  zawiera niezerowy wektor izotropowy, to istnieją takie bazy  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  w  $V$ , że  $G(h; \mathcal{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  oraz  $G(h; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

b) Niech  $\dim V = 2n$ . Wykazać, że jeśli forma  $h$  ma sygnaturę 0, to istnieje taka podprzestrzeń  $W \subset V$  wymiaru  $n$ , że dla każdych  $\alpha, \beta \in W$  zachodzi  $h(\alpha, \beta) = 0$ .

c) Niech  $\dim V = 2n$ . Wykazać, że jeśli istnieje taka podprzestrzeń  $W \subset V$  wymiaru  $n$ , że dla każdych  $\alpha, \beta \in W$  zachodzi  $h(\alpha, \beta) = 0$ , to forma  $h$  ma sygnaturę 0.