

Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach).

Na każdej kartce proszę podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNICIE), numer indeksu osoby zdającej, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

TEMAT A

1. Dane są rzeczywiste macierze

$$A_{(r,s)} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ r & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & s \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B_{(t,u)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & t & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad C_{(r,s)} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 \\ r & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & s \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix},$$

gdzie $r, s, t, u \in \mathbb{R}$.

- (a) W przestrzeni euklidesowej liniowej \mathbb{R}^4 ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dany jest endomorfizm $\varphi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ taki, że $M(\varphi)_{St}^{St} = A_{(4,-4)} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, gdzie St jest bazą standardową. Znaleźć bazę ortogonalną przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^4, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ w której φ ma macierz diagonalną.
- (b) Dany jest endomorfizm $\psi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ taki, że $M(\psi)_{St}^{St} = A_{(0,0)}$. Dla jakich wartości parametrów $t, u \in \mathbb{R}$ istnieje baza $\mathcal{A}_{(t,u)}$ taka, że $M(\psi)_{\mathcal{A}_{(t,u)}}^{\mathcal{A}_{(t,u)}} = B_{(t,u)}$? Odpowiedź starannie uzasadnić.
- (c) Dla jakich wartości parametrów r, s macierz $C_{(r,s)}$ jest diagonalizowalna nad \mathbb{R} ? Odpowiedź uzasadnić.
2. W przestrzeni afinicznej euklidesowej \mathbb{R}^3 ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dane jest przekształcenie $\varphi_{(r,s)}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ wzorem
- $$\varphi_{(r,s)}((x_1, x_2, x_3)) = \left(\frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{r}{3}x_3 + 1, \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3, \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{s}{3}x_3 - 1\right), \text{ gdzie } r, s \in \mathbb{R}.$$
- (a) Dla jakich wartości parametrów $r, s \in \mathbb{R}$ przekształcenie $\varphi_{(r,s)}$ jest izometrią?
- (b) Dany jest równoległoscian $R \subseteq \mathbb{R}^3$ o objętości 54. Znaleźć objętość obrazu $\varphi_{(3,-1)}(R)$ tego równoległoscianu przy przekształceniu $\varphi_{(3,-1)}$.
- (c) Dla jakich wartości parametru $r \in \mathbb{R}$ przekształcenie $\varphi_{r,-1}$ zmienia orientację ale zachowuje objętość 3-wymiarowych równoległoscianów? Odpowiedź uzasadnić.
3. W przestrzeni afinicznej \mathbb{R}^3 ze standardowym iloczynem skalarnym $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dana jest płaszczyzna $M = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$ i prosta $L = (0, 1, 0) + \text{lin}\{1, 0, 1\} \subseteq M$.
- (a) Znaleźć rzut prostopadły prostej $K = (1, 0, 3) + \text{lin}\{(2, 1, -3)\}$ na płaszczyznę M .
- (b) Ile jest zachowujących orientację izometrii φ przestrzeni euklidesowej $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ takich, że dla każdego $p \in L$, $\varphi(p) = p$ oraz dla każdego $q \in M$, $\varphi(q) \in M$? Każdą taką izometrię opisać, podając jej wartości na dowolnie wybranej bazie punktowej przestrzeni \mathbb{R}^3 .
- (c) Dane są dwie proste $L_1 = (2, 0, 0) + \text{lin}\{(0, 0, 1)\}$ i $L_2 = (0, 0, 1) + \text{lin}\{(0, 1, 0)\}$. Ile jest izometrii f przestrzeni euklidesowej afinicznej $(\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ takich, że $f(L_1) = L_2$ i $f(L_2) = L_1$. Odpowiedź uzasadnić.

4. Funkcjonał dwuliniowy symetryczny $h: \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ dany jest warunkiem $G(h, St) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$,

gdzie St jest bazą standardową.

- (a) Czy istnieje baza \mathcal{A} przestrzeni dwuliniowej (\mathbb{R}^4, h) taka, że $G(h, \mathcal{A}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$? Odpowiedź starannie uzasadnić.
- (b) Podać przykład 2-wymiarowej podprzestrzeni W takiej, że $h|_W$ jest iloczynem skalarnym na W . Znaleźć bazę ortogonalną $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ przestrzeni dwuliniowej (\mathbb{R}^4, h) taką, że $\alpha_3, \alpha_4 \in W$.
- (c) Podać przykład izotropowej 1-wymiarowej podprzestrzeni U przestrzeni dwuliniowej (\mathbb{R}^4, h) (tzn. dla dowolnego $\alpha \in U$, $h(\alpha, \alpha) = 0$). Czy istnieje izotropowa 2-wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni dwuliniowej (\mathbb{R}^4, h) ? Odpowiedź starannie uzasadnić.
5. Niech K będzie ciałem charakterystyki $\neq 2$ i niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem K .
- (a) Niech $\alpha \in V$ będzie niezerowym wektorem spełniającym $h(\alpha, \alpha) = 0$. Wykazać, że jeśli istnieje wektor $\beta \in V$ taki, że $h(\alpha, \beta) \neq 0$, to istnieje wektor $\beta' \in V$, $\beta' \neq 0$ taki, że $\beta' \neq \alpha$, $h(\beta', \beta') = 0$.
- (b) Wykazać, że dla każdego $a, b \in K$, $a \neq 0$ macierze $\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ są kongruentne nad K .
- (c) Wykazać, że jeśli (V, h) jest nieosobliwa i $\dim V = 3$, to dla każdego baz prostopadłych $\mathcal{A}, \mathcal{A}'$ przestrzeni (V, h) istnieje ciąg $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$ baz prostopadłych przestrzeni (V, h) taki, że $\mathcal{A} = \mathcal{B}_1$, $\mathcal{A}' = \mathcal{B}_r$ oraz dla każdego $i = 1, \dots, r-1$ bazy \mathcal{B}_i i \mathcal{B}_{i+1} mają wektor wspólny.
6. Funkcja $f_r: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f_r((x_1, x_2, x_3)) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1 - 2x_2 + rx_3$, gdzie $r \in \mathbb{R}$. Niech $X_r = \{(x_1, x_2, x_3): f_r((x_1, x_2, x_3)) = 0\}$ oraz niech $M = \{(x_1, x_2, x_3): x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$.
- (a) Określić typ afiniczny (oraz podać nazwę i naszkicować rysunek) hyperpowierzchni X_r w zależności od wartości parametru $r \in \mathbb{R}$.
- (b) Czy istnieje układ bazowy w \mathbb{R}^3 w którym powierzchnia X_0 jest opisana równaniem $u_1^2 - u_2^2 + u_3 = 0$? Jeśli tak, to podać przykład takiego układu bazowego.
- (c) Określić typ afiniczny krzywej $M \cap X_0$.