GAL potok 1, semestr letni, egzamin, 20.06.2008, temat A

1. Niech endomorfizm $\varphi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ będzie dany wzorem $\varphi((x_1, x_2, x_3)) =$ $= (x_1 - 2x_2 + x_3, -2x_1 - 2x_3, x_1 - 2x_2 + x_3)$ i niech $A = M(\varphi)_{\mathrm{st}}$.
a) Czy macierz A jest diagonalizowalna nad $\mathbf{R}$? Jeśli tak, to znaleźć wszystkie macierze diagonalne $B \in M_{3\times 3}(\mathbf{R})$ podobne do A.
b) Czy istnieje baza ortonormalna przestrzeni $(\mathbf{R}^3, <,>_{\mathrm{st}})$ złożona z wektorów własnych endomorfizmu φ? Jeśli tak, to podać przykład takiej bazy.
c) Niech $\psi = \varphi^{109}$. Obliczyć wymiar przestrzeni $\mathrm{im}\psi$ oraz znaleźć bazę przestrzeni $\ker\psi$.

2. W $(\mathbf{R}^3, <,>_{\mathrm{st}})$ dana jest prosta $L = (0,1,0) + \mathrm{lin}((1,2,1))$ oraz punkt $p_0 = (-2,-1,0)$.
a) Obliczyć odległość punktu p_0 od prostej L.
b) Dla jakich $s \in \mathbf{R}$ istnieje izometria $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ spełniająca warunki: $f(L) = L$ oraz $f(p_0) = (s, 1, -s)$? Odpowiedź uzasadnij.
c) Ile jest izometrii $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ takich, że $g((1,0,0)) = (1,0,0)$ oraz $\forall p \in L\ g(p) = p$? Dla każdej takiej izometrii g obliczyć $g((0,0,0))$.

3. Niech forma dwuliniowa $h : \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ będzie dana $h((x_1,x_2,x_3,x_4),(y_1,y_2,y_3,y_4))$ $= x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_3 + x_4y_4$ oraz niech

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 0 & a^2 & a \end{bmatrix}.$$

a) Znaleźć rząd i sygnaturę formy h.
b) Czy istnieje baza $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbf{R}^4$ w której forma h ma macierz A ? Jeśli tak, to podać przykład takiej bazy.
c) Dla jakich $a \in \mathbf{R}$ macierz $G(h; \mathrm{st})$ jest kongruentna nad $\mathbf{R}$ z macierzą B ? Odpowiedź uzasadnij.

4. Niech $X = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid 3x_1^2 + 7x_2^2 + 8x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 2\}$.
a) Określić typ afiniczny hiperpowierzchni X. Wykonać szkicowy rysunek.
b) Niech $M = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1 + x_3 = 1\}$. Określić typ afiniczny krzywej $X \cap M$.
c) Podać przykład takiej płaszczyzny N w $\mathbf{R}^3$, że krzywa $X \cap N$ jest elipsą.

5. Niech (V, h) będzie przestrzenią dwuliniową nad ciałem K. Mówimy, że podprzestrzeń liniowa $W \subset V$ jest maksymalną podprzestrzenią nieosobliwą przestrzeni (V, h), jeśli przestrzeń $(W, h|_W)$ jest niesobliwa i dla każdego $\alpha \in V \setminus W$ przestrzeń $(W', h|_{W'})$, gdzie $W' = W + \mathrm{lin}(\alpha)$, jest osobliwa. Wykazać, że
a) Każda przestrzeń dwuliniowa (V, h) posiada maksymalną podprzestrzeń niesobliwą.
b) Jeśli $W \subset V$ jest maksymalną podprzestrzenią niesobliwą, to istnieje podprzestrzeń $Z \subset V$ taka, że $V = W \oplus Z$, $W \perp Z$ i forma $h|_Z$ jest zerowa.
c) Jeśli W_1, W_2 są dwoma maksymalnymi podprzestrzeniami nieosobliwymi przestrzeni (V, h), a $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ oraz $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ są, odpowiednio, ich bazami, to $k = m$ oraz macierze $G(h|_{W_1}; \mathcal{A})$, $G(h|_{W_2}; \mathcal{B})$ są kongruentne nad K.