GAL potok 1, egzamin, 26.06.2007

Każde zadanie powinno być rozwiązane na oddzielnej kartce.
Na każdej kartce: imię i nazwisko osoby zdającej, numer indeksu, numer grupy ćwiczeniowej, numer rozwiązywanego zadania oraz litera - nazwa tematu.

Temat A

1. Rozpatrzmy endomorfizm $\varphi : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$, $\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (2x_1+x_2, -x_1+4x_2, x_1+x_2+x_3-2x_4, -x_1-x_2+2x_3+5x_4)$ oraz macierz $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & t \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Czy endomorfizm φ jest diagonalizowalny? Jeśli tak, to podać przykład takiej bazy, w której jego macierz jest diagonalna.
b) Znaleźć postać Jordana macierzy $M(\varphi)_{\mathrm{st}}$.
c) Dla jakich $t \in \mathbf{R}$ macierze $M(\varphi)_{\mathrm{st}}$ oraz B są podobne?

2. Niech forma dwuliniowa $h : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ będzie dana wzorem $h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.
a) Znaleźć bazę prostopadłą przestrzeni dwuliniowej $(\mathbf{R}^3, h)$.
b) Obliczyć sygnaturę formy h. Podać przykład 2-wymiarowej podprzestrzeni $W \subset \mathbf{R}^3$ takiej, że forma $h|W$ ma sygnaturę 0.
c) Niech $Z_t = \mathrm{lin}((1,0,0),(0,1,t))$. Dla jakich $t \in \mathbf{R}$ zachodzi $\mathbf{R}^3 = Z_t \oplus Z_t^{\perp}$?

3. Niech X będzie hiperpowierzchnią w $\mathbf{R}^3$ opisaną w standardowym układzie bazowym równaniem $x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_2x_3 + 4x_3 + 1 = 0$.
a) Określić typ afiniczny hiperpowierzchni X. Wykonać szkicowy rysunek.
b) Podać przykład takiego układu bazowego w $\mathbf{R}^3$, w którym X jest opisana równaniem wielomianowym nie mającym składników postaci $a_{ij}x_ix_j$ dla $i \neq j$ i mającym co najwyżej jeden składnik stopnia 1 lub 0.
c) Dla jakich wartości parametru $s \in \mathbf{R}$ hiperpowierzchnia X jest afinicznie izomorficzna z hiperpowierzchnią Y opisaną w standardowym układzie bazowym w $\mathbf{R}^3$ równaniem $4x_1^2 - 3x_2^2 + (2-s)x_3^2 + 1 = 0$?

4. a) Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będą wektorami przestrzeni euklidesowej liniowej $(V, <\ ,\ >)$ i niech $\varphi : V \to V$ będzie takim przekształceniem liniowym, że $||\alpha_i|| = ||\varphi(\alpha_i)||$ dla każdego $i = 1, \ldots, k$ oraz $||\alpha_i + \alpha_j|| = ||\varphi(\alpha_i + \alpha_j)||$ dla każdych $i, j = 1, \ldots, k$. Wykazać, że $< \alpha, \beta > = < \varphi(\alpha), \varphi(\beta) >$ dla każdych $\alpha, \beta \in \mathrm{lin}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.
b) Niech $p_0, \ldots, p_n$ będzie bazą punktową przestrzeni euklidesowej afinicznej $(H, <\ ,\ >)$ i niech $f : H \to H$ będzie takim przekształceniem afinicznym, że $\rho(p_i, p_j) = \rho(f(p_i), f(p_j))$ dla każdych $i, j = 1, \ldots, n$. Wykazać, że f jest izometrią przestrzeni $(H, <\ ,\ >)$.
c) Niech $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ będą wektorami przestrzeni euklidesowej liniowej $(V, <\ ,\ >)$ i niech $a_{ij} = < \alpha_i, \alpha_j >$ dla $i, j = 1, \ldots, k$. Określmy formę kwadratową $q : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ wzorem $q(x_1, \ldots, x_k) = \Sigma_{i,j=1}^k a_{ij}x_ix_j$. Wykazać, że forma q jest dodatnio półokreślona.

GAL potok 1, egzamin, 26.06.2007

Temat A

Dla każdego z poniższych pojęć podaj jego definicję i zilustruj ją przykładem.

funkcjonał liniowy

wyznacznik macierzy

przekształcenie samosprzężone

forma kwadratowa

izometria przestrzeni euklidesowej afinicznej

GAL potok 1, egzamin, 26.06.2007

Temat B

Dla każdego z poniższych pojęć podaj jego definicję i zilustruj ją przykładem.

iloczyn skalarny

wyznacznik macierzy

przekształcenie afiniczne

forma kwadratowa

baza dualna do bazy $\mathcal{A}$ przestrzeni V