GAL - potok 1, egzamin pisemny, 13.06.2005, Temat A

1. Niech endomorfizm $\varphi : \mathrm{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ będzie zadany wzorem $\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4)) =$ $= (x_1 - x_2, 2x_1 + 4x_2, 6x_1 + 3x_2 + 2x_4, 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4)$.
a) Znaleźć wartości własne i bazy przestrzeni własnych endomorfizmu φ.
b) Czy endomorfizm φ jest diagonalizowalny? Uzasadnić.
c) Czy istnieje taka baza $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbf{R}^4$, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$? Uzasadnić.

2. W $\mathbf{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym rozpatrzmy punkt $q = (2, 2, -1)$, prostą $L : (1, 3, -3) + t(0, -1, 2)$ i płaszczyznę $M : 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4$. Znaleźć:
a) parametryzację płaszczyzny zawierającej q i L,
b) zbiór punktów, które można otrzymać jako obrazy q w izometriach $g : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ spełniających: $g(p) = p$ dla każdego $p \in M$,
c) równanie płaszczyzny będącej obrazem M w symetrii prostopadłej względem L.

3. Rozpatrzmy formę dwuliniową $h : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = x_1y_2$ $+x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2 + 2x_3y_3$.
a) Znaleźć rząd i sygnaturę formy h.
b) Znaleźć bazę prostopadłą $\mathcal{A}$ przestrzeni $\mathbf{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym będącą równocześnie bazą prostopadłą przestrzeni dwuliniowej $(\mathbf{R}^2, h)$. Znaleźć $G(h; \mathcal{A})$.
c) Niech $W_t = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid tx_1 + x_2 = 0\}$ i niech $h_t : W_t \times W_t \to \mathbf{R}$ będzie formą h ograniczoną do przestrzeni W_t. Dla jakich par $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ macierze form h_{t_1} i h_{t_2} są kongruentne nad R?

4. Niech X będzie hiperpowierzchnią w $\mathbf{R}^3$ zadaną równaniem $5x_1^2 + 3x_2^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3$ $+4x_1 + 4x_3 + 8 = 0$.
a) Określić typ afiniczny hiperpowierzchni X. Wykonać rysunek.
b) Określić typ afiniczny krzywej S otrzymanej przez przecięcie hiperpowierzchni X płaszczyzną $M : x_3 = -1$. Wykonać rysunek.
$x_3 = -2$ c) Dla jakich $t \in \mathrm{R}$ hiperpowierzchnia X jest afinicznie izomorficzna z hiperpowierzchnią opisaną równaniem $-x_1^2 + x_2^2 + (t+2)x_3^2 - 4x_2 + 2 = 0$?

5. Niech $h : V \times V \to \mathrm{R}$ będzie formą dwuliniową symetryczną na skończenie wymiarowej przestrzeni V nad ciałem R.
a) Wykazać, że dla każdego podzbioru $X \subset V$ podzbiór $X^\perp = \{\alpha \in V \mid \forall_{\beta \in X} h(\alpha, \beta) = 0\}$ jest podprzestrzenią liniową w V.
b) Wykazać, że jeśli jedynym wektorem izotropowym przestrzeni (V, h) jest wektor zerowy, to h lub $-h$ jest iloczynem skalarnym.
c) Wykazać, że jeśli forma h jest nieosobliwa, to dla każdej podprzestrzeni $W \subset V$ takiej, że $h(\alpha, \beta) = 0$ dla każdych $\alpha, \beta \in W$ zachodzi: $\mathrm{dimW} \leq \frac{1}{2}\mathrm{dimV}$.