

1. Niech  $\varphi : R^4 \rightarrow R^4$  będzie endomorfizmem, który w bazie standardowej ma macierz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ .

a) Znaleźć wartości własne i bazy przestrzeni własnych endomorfizmu  $\varphi$ .

b) Znaleźć macierz Jordana podobną do macierzy  $A$ .

c) Dla jakich wartości parametru  $r \in R$  macierz  $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & r \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  jest podobna do  $A$ ?

2. W  $R^3$  zadany jest standardowy iloczyn skalarny.

a) Znaleźć przekształcenie afiniczne  $f : R^3 \rightarrow R^3$  będące rzutem prostopadłym na płaszczyznę  $x_1 - x_2 + x_3 = 2$ .

b) Znaleźć na krzywej  $S = \{(r^2, r, 4r) \mid r \in R\}$  punkt leżący najbliżej płaszczyzny  $5x_1 - x_2 + x_3 = -2$ .

c) Dla jakich wartości parametru  $t \in R$  przekształcenie  $\varphi : R^3 \rightarrow R^3$  zadane wzorem

$$\varphi((x_1, x_2, x_3)) = \frac{1}{3}(-x_1 + tx_2 + 2x_3, 2x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_1 - x_2 + 2x_3)$$

(i) jest izometrią? (ii) zachowuje objętość 3-wymiarowych równoległościanów? (iii) zachowuje orientację?

3. Niech  $X, Y_t, Z$  będą hiperpowierzchniami w  $R^3$  zadanymi równaniami:

$$X : x_1^2 - x_2^2 - 5x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_2x_3 - 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 9 = 0,$$

$$Y_t : (t-2)x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_2 + 1 = 0,$$

$$Z : 2x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 1 = 0.$$

a) Znaleźć typ afiniczny hiperpowierzchni  $X$ .

b) Dla jakich wartości parametru  $t \in R$  hiperpowierzchnie  $X$  i  $Y_t$  są afinicznie izomorficzne?

c) Dla jakich wartości parametru  $t \in R$  hiperpowierzchnie  $Z$  i  $Y_t$  są izometryczne?

4. Niech  $V$  będzie skończenie wymiarową przestrzenią liniową nad  $R$  z iloczynem skalarnym

$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow R$ . Niech  $\varphi : V \rightarrow V$  będzie przekształceniem liniowym spełniającym warunek

$$\forall \alpha, \beta \in V \quad \langle \varphi(\alpha), \beta \rangle = \langle \alpha, \varphi(\beta) \rangle.$$

a) Wykazać, że jeśli  $\gamma_1, \gamma_2 \in V$  są wektorami własnymi endomorfizmu  $\varphi$  odpowiadającymi różnym wartościom własnym, to  $\gamma_1, \gamma_2$  są prostopadłe.

b) Wykazać, że jeśli  $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  jest bazą ortonormalną przestrzeni euklidesowej  $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , to macierz  $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$  jest symetryczna.

c) Wykazać, że jeśli  $G : V \rightarrow V^*$  jest izomorfizmem zadanym warunkiem:

$$G(\alpha) = \psi \iff \forall \beta \in V \quad \psi(\beta) = \langle \alpha, \beta \rangle$$

to  $G \circ \varphi = \varphi^* \circ G$ .