GAL EGZAMIN 05.06.2000.

Temat A

1. W przestrzeni R^3 ze standardowym iloczynem skalarnym dane są punkty $p = (0,1,3)$ i $q = (4,1,4)$ oraz wektory $\alpha = (1,-1,0)$ i $\beta = (4,-1,3)$.
a) obliczyć odległość punktu q od prostej $p + \text{lin}(\alpha)$
b) wyznaczyć $b \in R$, dla którego odległość punktu q od prostej $L_b = p + \text{lin}(\alpha + b\beta)$ osiąga najmniejszą wartość.

2. W przestrzeni R^4 ze standardowym iloczynem skalarnym dana jest podprzestrzeń
$W = \text{lin}((1,1,0,1),(0,2,-1,1),(3,-1,2,1))$.
a) Znaleźć taką bazę prostopadłą $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ w R^4, że $\beta_1, \beta_2 \in W$.
b) Znaleźć wzór na przekształcenie $\varphi : R^4 \to R^4$ będące rzutem prostopadłym na W.

3. Niech $\varphi : R^4 \to R^4$ będzie przeształceniem liniowym zadanym wzorem
$\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 2x_3, 0)$.
a) Znaleźć taką bazę prostopadłą przestrzeni R^4 ze standardowym iloczynem skalarnym, że każdy wektor tej bazy jest wektorem własnym przekształcenia φ.
b) Niech $A = M(\varphi)_{st}^{st}$. Znaleźć taką macierz ortogonalną $C \in M_{4\times4}(R)$, że macierz C^TAC jest diagonalna.

4. Dla każdego $t \in R$, niech W_t oznacza hiperpowierzchnię w R^3 opisaną warunkiem
$W_t = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3 + tx_3 + 4 = 0\}$.
a) Czy hiperpowierzchnie W_1 i W_{-4} mają ten sam typ afiniczny?
b) Dla jakich $t \in R$ hiperpowierzchnia W_t ma środek symetrii ?

5. Niech V będzie przestrzenią liniową nad cialem K i niech $\varphi : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Niech $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ będzie takim układem niezerowych wektorów przestrzeni V, że dla każdego $1 \leq i \leq k$ istnieje $a_i \in K$, że $\varphi(\alpha_i) = a_i\alpha_i$ przy czym $a_i \neq a_j$ dla każdych $i \neq j$. Wykazać, że układ $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ jest liniowo niezależny.

6. Niech E będzie przestrzenią euklidesową afiniczną i niech $f : E \to E$ będzie przekształceniem afinicznym. Wykazać, że: $\tilde{f} = \text{id} \iff$ istnieje taka liczba rzeczywista M, że $\forall q \in E \;\; \rho(q, f(q)) \leq M$.