Egzamin z GAL-u (potok drugi)
grupa A

Zad 1.

Niech R^3 będzie liniową przestrzenią euklidesową z iloczynem skalarnym φ, zaś V_1 i V_2 niech bedą podprzestrzeniami opisanymi odpowiednio równaniami: $x_1 + x_3 = 0$ i $x_1 + x_2 = 0$.

(a) Podać przykład przekształcenia euklidesowego (=izometrii liniowej) $f : R^3 \to R^3$ takiego, że $f(V_1) = V_2$,

(b) Znaleźć postać kanoniczną macierzy tego przekształcenia. Jaka jest interpretacja geometryczna znalezionej izometrii?

Zad 2.

Niech $A, B \in M_{3X3}(R)$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $a \in R$.

(a) Niech $f : R^3 \to R^3$ będzie takim przekształceniem liniowym, że $A = M_{st}(f)$. Dla jakiego $a \in R$ istnieje taka baza $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,\}$ w $\mathcal{R}^3$, że $B = M_{\mathcal{A}}(f)$. Wskazać tę bazę, jeśli istnieje.

(b) Niech φ będzie funkcjonałem dwuliniowym $\mathcal{R}^3$ takim, że $A = M_{st}(\varphi)$. Dla jakiego $a \in \mathcal{R}$ istnieje baza $\mathcal{B} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3,\}$ w $\mathcal{R}^3$ taka, że $B = M_{\mathcal{B}}(\varphi)$.

Zad 3.

Niech $\mathcal{R}^3$ będzie afiniczną przestrzenią euklidesową ze standardowym iloczynem skalarnym i niech $\mathcal{H} = af\{[1,2,1],[2,3,1],[2,4,1]\}$.

(a) Znaleźć wzór rzutu prostopadłego $\mathcal{R}^3$ na $\mathcal{H}$.

(b) Znaleźć odległość punktu $[0,0,0]$ od podprzestrzeni $\mathcal{H}$.

Zad 4.

Niech $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ będą hiperpowierzchniami opisanymi odpowiednio równaniami:

$$2x_1x_2 + x_2 + t = 0$$

$$x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_3^2 + s = 0$$

gdzie $t, s \in \mathcal{R}$

(a) Sprawdzić, czy $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ są afinicznie równoważne nad $\mathcal{R}$ dla $t = 1$, $s = 1$.

(b) Dla jakich $t, s \in \mathcal{R}$ $\mathcal{H}_1$ i $\mathcal{H}_2$ są afinicznie równoważne nad $\mathbb{C}$?

Zad 5.

Niech V będzie przestrzenią euklidesową z iloczynem skalarnym φ. Niech $f : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym zachowującym ortogonalność wektorów, czyli takim że

$$\forall_{\alpha,\beta \in V}\ [\alpha \perp \beta \Rightarrow f(\alpha) \perp f(\beta)]$$

Wykazać, że:

(a) $\forall_{\alpha,\beta \in V}\ [\|\alpha\| = \|\beta\| \Rightarrow \|f(\alpha)\| = \|f(\beta)\|]$.

(b) $f = h \circ g$, gdzie g jest izomorfizmem euklidesowym, zaś h jest homotetią (tzn. $\exists_{a \in \mathcal{R}} \forall_{\alpha \in V}\ \mathrm{h}(\alpha) = a\alpha$).