Egzamin GAL 2
31 sierpnia 2010

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić i podać wszystkie użyte obliczenia.

Zadanie 1 *Niech* $\phi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ *będzie przekształceniem liniowym mającym w bazie standardowej macierz*

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

a) Znajdź taką bazę $\mathbb{R}^4$*, w której* ϕ *ma macierz w postaci Jordana.*

b) Udowodnij, że dla $n > 1$ *macierz* M^n *nie jest diagonalizowalna.*

c) Zbadaj dla jakich liczb rzeczywistych r *przekształcenie* $\psi = \phi - r \cdot Id$ *jest różnowartościowe.*

Zadanie 2 *Niech* ξ *będzie funkcjonałem dwuliniowym symetrycznym na* $\mathbb{R}^3$

o macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & t & t \\ 1 & t & t+1 \end{bmatrix}$.

a) Zbadaj dla jakich wartości parametru t*, funkcjonał* ξ *jest iloczynem skalarnym.*

b) Dla $t = 0$ *podaj przykład bazy ortogonalnej i półunormowanej względem* ξ.

c) Zbadaj dla jakich wartości parametru t*, przestrzeń* $\{\mathbb{R}^3; \xi\}$ *zawiera dwuwymiarową podprzestrzeń całkowicie zdegenerowaną.*

Zadanie 3 *a) Napisz wzór analityczny i macierz symetrii prostopadłej* $S : E(\mathbb{R}^3) \to E(\mathbb{R}^3)$ *względem prostej* $l_1 = [0, 1, 0] + lin\{(1, -2, 2), \}$.

b) Wylicz równanie płaszczyzny $S\,(af([1, 1, 1], [0, 2, 0], [1, 0, 1]))$.

Zadanie 4 *Niech* $F_t(x_1, x_2, x_3) = 4x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + tx_3 + 2$ *i* $H_t = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid F_t(p) = 0\}$.

a) Zbadaj dla jakich wartości parametru t*, hiperpowierzchnia* H_t *jest hiperboloidą dwupowłokową.*

b) Opisz zbiór środków symetrii H_t *w zależności od parametru* t.

c) Udowodnij, że hiperpowierzchnia H_2 *jest prostokreślna.*

Teoria

1) Podaj definicję wymiaru przestrzeni afinicznej. Znajdź bazę punktową oraz wymiar podprzestrzeni afinicznej rozpiętej na punktach $[1,2,1],[2,2,0],[3,2,-1] \in \mathbb{R}^3$.

2) Niech V będzie przestrzenią euklidesową liniową. Podaj definicję przekształcenia euklidesowego $f : V \to V$. Udowodnij, że macierz przekształcenia euklidesowego w bazie ortonormalnej jest ortogonalna. Podaj przykład przekształcenia euklidesowego $f : E^3 \to E^3$ i takiej bazy nieortogonalnej $\mathcal{A}$, że $M(f)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}$ jest ortogonalna.

3) Niech V będzie przestrzenią euklidesową liniową i $f : V \to V$. Niech $W \subset V$ będzie podprzestrzenią niezmienniczą.

a) Udowodnij, że gdy f jest ortogonalne to $W^{\perp}$ jest podprzestrzenią niezmienniczą.

b) Udowodnij, że gdy f jest samosprzężone to $W^{\perp}$ jest podprzestrzenią niezmienniczą.

4) Niech $A, B \in \mathbb{R}_n^n$ będą macierzami kwadratowymi.

a) Podaj definicję, kiedy A i B są podobne.

b) Podaj definicję, kiedy A i B są kongruentne.

c) Uzasadnij, że jeżeli A i B są podobne i symetryczne to są kongruentne.