Egzamin GAL 2
12 czerwca 2009

Zadanie 1 *Niech* $\phi : R^4 \longrightarrow R^4$ *będzie przekształceniem mającym w bazie standardowej macierz*

$$M = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Znajdź taką bazę R^4, *w której* ϕ *ma macierz w postaci Jordana.*
b) Wypisz wielomian charakterystyczny i wielomian minimalny macierzy M^9.

Zadanie 2 *Niech* $l_1 = [0,-1,2]+lin\{(1,2,0),\}$ *i* $l_2 : \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 6x_3 = 0 \end{array} \right.$ *będą prostymi w* R^3.

a) Niech prosta l_3 *przechodzi przez punkt* $[0,1,0]$ *i przecina obie proste* l_1 *i* l_2. *Opisz* l_3 *i znajdź punkty przecięcia* $l_1 \cap l_3$ *i* $l_2 \cap l_3$.
2) Oblicz odległość $\rho(l_1; l_2)$ *między* l_1 *i* l_2.

Zadanie 3 *Niech* $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Niech $\xi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *będzie określone macierzą* A.
a) Sprawdź czy ξ *jest iloczynem skalarnym.*
b) Znajdź bazę ortogonalną i półunormowaną względem funkcjonału ξ *przestrzeni* $\mathbb{R}^3$.
c) Wykaż, że maksymalna całkowicie zdegenerowaną podprzestrzeń $\{\mathbb{R}^3; \xi\}$ *ma wymiar 2.*

Zadanie 4 *Niech* $l = [1,0,3] + lin\ \{(2,2,1)\}$ *będzie prostą w przestrzeni* $E(\mathbb{R}^3)$.

a) Napisz wzór analityczny i macierz symetrii S *względem prostej* l.
b) Opisz obraz płaszczyzny $H = af\{[1,2,3],[1,2,0],[0,2,3]\}$ *w symetrii* S.

Zadanie 5 *Niech* $F_t(x_1,x_2,x_3) =$
$= x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3 - 6x_1 - 2x_2 + 4tx_3 - 2t + 4$
i $H_t = \{x \in R^3 \mid F_t(x) = 0\}$.

a) Opisz zbiór środków symetrii H_t *w zależności od parametru* t.
b) Zbadaj dla jakich wartości parametru t *hiperpowierzchnia* H_t *jest prostokreślna.*

Egzamin GAL 2

12 czerwca 2009

Teoria

1)Podaj definicję wielomianu charakterystycznego i wielomianu minimalnego macierzy M. Wypisz zależności między tymi wielomianami.

2) Podaj definicję kiedy zbiór punktów P z przestrzeni afinicznej H jest w położeniu ogólnym a kiedy w szczególnym. Udowodnij, że w przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^n$ każdy maksymalny układ punktów w położeniu ogólnym liczy $n+1$ elementów.

3) Podaj definicję podprzestrzeni $W^{\perp}$ przestrzeni euklidesowej V i definicję symetrii prostopadłej.

4) Podaj definicję wyznacznika Grama i jego zastosowanie..

5) Podaj definicję hiperpowierzchni w przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^n$ i napisz kiedy dwie hiperpowierzchnie mają ten sam typ afiniczny.