GAL, Egzamin, 15.06.2009

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce prosze podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE) i numer indeksu osoby zdającej, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

TEMAT **A**

(1) Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ będzie endomorfizmem takim, że $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_3, x_2 - x_3, -x_1 + x_2 + x_3)$.

- (a) Znaleźć postać Jordana macierzy $M(\varphi)_{\mathcal{S}t}$, gdzie $\mathcal{S}t$ jest bazą standardową.
- (b) Dla jakich wartości parametrów $r, s \in \mathbb{R}$, istnieje baza $\mathcal{A}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ taka, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & s \\ 0 & 3 & r \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.
- (c) Czy istnieje baza $\mathcal{B}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ taka, że $M(\varphi)_{\mathcal{B}}$ jest macierzą symetryczną? Odpowiedź uzasadnić.

(2) W przestrzeni euklidesowej afinicznej $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym, dany jest punkt $p = (1, 1, -1)$ i prosta $L\colon p + lin((1, 2, -1))$.

- (a) Znaleźć odległość punktu $(1, 4, -1)$ od prostej L.
- (b) Niech P będzie płaszczyzną przechodzącą przez punkt p i prostopadłą do wektora $(3, 5, 1)$. Znaleźć równanie opisujące P. Niech płaszczyzna $\overline{P}$ będzie obrazem P przy symetrii prostopadłej względem prostej L. Znaleźć równanie opisujące $\overline{P}$.
- (c) Znaleźć odleglość prostej M: $(-1, 0, 1) + lin((2, 1, 1))$ od prostej L.

(3) Dana jest przestrzeń euklidesowa afiniczna $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym.

- (a) Podać przykład (podając wzór) izometrii euklidesowej afinicznej $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, która przeprowadza prostą $\mathrm{af}((0, 0, 0), (0, 0, 1))$ na prostą $\mathrm{af}((0, 0, 0), ((0, 1, 0))$.
- (b) Dany jest punkt $p = (3, 2, 2) \in \mathbb{R}^3$ i prosta L: $(1, 1, 2) + lin((1, 1, -1))$. Ile jest izometrii euklidesowych afinicznych $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ takich, że $f(p) = p$, oraz dla dowolnego punktu $q \in L$, $f(q) \in L$. Odpowiedź uzasadnić.
- (c) Niech $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ będzie izometrią euklidesową afiniczną taką, że $f(p) = p$ i $f(q) = q$ dla dowolnego punktu $q \in L$, oraz f zmienia orientację przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (gdzie orientacja w $\mathbb{R}^3$ zadana jest przez bazę standardową). Opisać f podając wzór lub podając wartości f na jakiejś bazie punktowej przestrzeni afinicznej R^3.

(4) Niech $h\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ będzie funkcjonałem dwuliniowym danym w bazie standardowej $\mathcal{S}t$ macierzą

$$G(h, \mathcal{S}t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Znaleźć bazę ortogonalną przestrzeni dwuliniowej $(\mathbb{R}^4, h)$.
- (b) Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$, istnieje baza $\mathcal{B}_t$ taka, że $G(h, \mathcal{B}_t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix}$.
- (c) Niech $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\colon -x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0\}$
  - (c.1) Określić typ afiniczny (oraz podać nazwę) hiperpowierzchni X.
  - (c.2) Czy istnieje płaszczyzna P w $\mathbb{R}^3$ taka, że $X \cap P$ jest hiperbolą? Jeśli tak, podać przykład takiej płaszczyzny (podając jej równanie w $\mathbb{R}^3$).

(5) Niech (V, h) będzie rzeczywistą przestrzenią dwuliniową wymiaru $2n$. Niech przestrzeń V będzie sumą prostą $n-$wymiarowych podprzestrzeni V_+ i V_- takich, że h jest dodatnio określony na V_+ i ujemnie określony na V_-, oraz V_+ i V_- są wzajemnie ortogonalne (tzn. $h(v_1, v_2) = 0$ dla dowolnych $v_1 \in V_+$, $v_2 \in V_-$).
Podprzestrzeń liniową W w (V, h) nazywamy izotropową, jeśli $h(\alpha, \alpha) = 0$ dla dowolnego $\alpha \in W$.

- (a) Udowodnić, że każda podprzestrzeń izotropowa w (V, h) ma wymiar nie większy niż n.
- (b) Pokazać, że istnieje podprzestrzeń izotropowa w (V, h) wymiaru n.
- (c) Udowodnić, że każda podprzestrzeń izotropowa w (V, h) zawiera się w podprzestrzeni izotropowej wymiaru n.

GAL, Egzamin, 15.06.2009

Każdą odpowiedź TRZEBA starannie uzasadnić. Rozwiązanie każdego zadania TRZEBA napisać na ODDZIELNEJ kartce (lub kartkach). Na każdej kartce prosze podać: imię, nazwisko (BARDZO CZYTELNIE) i numer indeksu osoby zdającej, numer rozwiązywanego zadania i literę tematu.

TEMAT **B**

(1) Niech $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ będzie endomorfizmem takim, że $\varphi((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 - x_3, x_2 + x_3, -x_1 - x_2 + x_3)$.

- (a) Znaleźć postać Jordana macierzy $M(\varphi)_{\mathcal{S}t}$, gdzie $\mathcal{S}t$ jest bazą standardową.
- (b) Dla jakich wartości parametrów $r, s \in \mathbb{R}$, istnieje baza $\mathcal{A}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ taka, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & s \\ 0 & 3 & r \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.
- (c) Czy istnieje baza $\mathcal{B}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ taka, że $M(\varphi)_{\mathcal{B}}$ jest macierzą symetryczną? Odpowiedź uzasadnić.

(2) W przestrzeni euklidesowej afinicznej $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym , dany jest punkt $p = (-1, 1, 1)$ i prosta $L\colon p + lin((-1, 2, 1))$.

- (a) Znaleźć odległość punktu $(-1, 4, 1)$ od prostej L.
- (b) Niech P będzie płaszczyzną przechodzącą przez punkt p i prostopadłą do wektora $(-5, 3, 1)$. Znaleźć równanie opisujące P. Niech płaszczyzna $\overline{P}$ będzie obrazem P przy symetrii prostopadłej względem prostej L. Znaleźć równanie opisujące $\overline{P}$.
- (c) Znaleźć odleglość prostej M: $(1, 0, -1) + lin((1, 1, 2))$ od prostej L.

(3) Dana jest przestrzeń euklidesowa afiniczna $\mathbb{R}^3$ ze standardowym iloczynem skalarnym.

- (a) Podać przykład (podając wzór) izometrii euklidesowej afinicznej $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ która przeprowadza prostą $\mathrm{af}((0, 0, 0), (0, 1, 0))$ na prostą $\mathrm{af}((0, 0, 0), ((1, 0, 0))$.
- (b) Dany jest punkt $p = (2, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ i prosta L: $(1, 2, 1) + lin((1, -1, 1))$. Ile jest izometrii euklidesowych afinicznych $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ takich, że $f(p) = p$, oraz dla dowolnego punktu $q \in L$, $f(q) \in L$. Odpowiedź uzasadnić.
- (c) Niech $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ będzie izometrią euklidesową afiniczną taką, że $f(p) = p$ i $f(q) = q$ dla dowolnego punktu $q \in L$, oraz f zmienia orientację przestrzeni $\mathbb{R}^3$ (gdzie orientacja w $\mathbb{R}^3$ zadana jest przez bazę standardową). Opisać f podając wzór lub podając wartości f na jakiejś bazie punktowej przestrzeni afinicznej R^3.

(4) Niech $h\colon \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ będzie funkcjonałem dwuliniowym danym w bazie standardowej $\mathcal{S}t$ macierzą

$$G(h, \mathcal{S}t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Znaleźć bazę ortogonalną przestrzeni dwuliniowej $(\mathbb{R}^4, h)$.
- (b) Dla jakich wartości parametru $t \in \mathbb{R}$, istnieje baza $\mathcal{B}_t$ taka, że $G(h, \mathcal{B}_t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}$.
- (c) Niech $X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\colon 2x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0\}$.
  - (c.1) Określić typ afiniczny (oraz podać nazwę) hiperpowierzchni X.
  - (c.2) Czy istnieje płaszczyzna P w $\mathbb{R}^3$ taka, że $X \cap P$ jest hiperbolą? Jeśli tak, podać przykład takiej płaszczyzny (podając jej równanie w $\mathbb{R}^3$).

(5) Niech (V, h) będzie rzeczywistą przestrzenią dwuliniową wymiaru $2n$. Niech przestrzeń V będzie sumą prostą $n-$wymiarowych podprzestrzeni V_+ i V_- takich, że h jest dodatnio określony na V_+ i ujemnie określony na V_-, oraz V_+ i V_- są wzajemnie ortogonalne (tzn. $h(v_1, v_2) = 0$ dla dowolnych $v_1 \in V_+$, $v_2 \in V_-$).
Podprzestrzeń liniową W w (V, h) nazywamy izotropową, jeśli $h(\alpha, \alpha) = 0$ dla dowolnego $\alpha \in W$.

- (a) Udowodnić, że każda podprzestrzeń izotropowa w (V, h) ma wymiar nie większy niż n.
- (b) Pokazać, że istnieje podprzestrzeń izotropowa w (V, h) wymiaru n.
- (c) Udowodnić, że każda podprzestrzeń izotropowa w (V, h) zawiera się w podprzestrzeni izotropowej wymiaru n.