

Statystyczna Analiza Danych, zestaw 3

Zad 1 Niech $X \sim \theta x^{\theta-1} \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$, gdzie θ jest nieznanym parametrem. Na podstawie jednej obserwacji wyznacz przedział ufności dla θ na poziomie $1 - \alpha$.

($X \sim \theta x^{\theta-1} \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$, θ unknown. Compute confidence interval for θ , confidence level $1 - \alpha$)

Zad 2 Niech $X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{Unif}([0, \theta])$. Znajdź przedział ufności postaci $[X_{n:n}, cX_{n:n}]$ na poziomie ufności $1 - \alpha$.

($X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $\text{Unif}(0, \theta)$, θ unknown. Find confidence interval, confidence level $1 - \alpha$, of form $[X_{n:n}, cX_{n:n}]$).

Zad 3 Jaka powinna być długość próbki pochodzącej z rozkładu normalnego $N(\mu, \sigma^2)$, ze znanym $\sigma^2 > 0$ aby dwustronny przedział ufności dla μ na poziomie istotności 0.95 miał długość mniejszą niż 0.01? Wskazówka: kwantyl rozkładu normalnego na poziomie 0.975 jest równy 1.96.

(How large a sample from $N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 > 0$ known, is needed to get a two-sided confidence interval for μ confidence level 0.95 having width less than 0.01)

Zad 4 Niech $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$. Niech $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$ oraz $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$. Udowodnij, że $\bar{X}$ oraz S^2 to zmienne niezależne oraz $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$.

($X_1, \dots, X_n$ i.i.d. $N(\mu, \sigma^2)$ Let $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j$ and $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$. Show that $\bar{X} \perp S^2$ and $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$)

Zad 5 Niech $X_1, \dots, X_m \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$ i $Y_1, \dots, Y_n \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Znajdź przedział ufności dla ilorazu $\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$ na poziomie ufności $1 - \alpha$. (Podpowiedź: można wskazać zmienną piwotalną o rozkładzie F-Snedekora)

($X_1, \dots, X_m$ i.i.d. $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ independent of $Y_1, \dots, Y_n$ i.i.d. $N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Find symmetric confidence interval, confidence level $1 - \alpha$ for quotient $\frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2}$.)

Zad 6 Niech $X_1, \dots, X_m \sim N(\mu_X, \sigma^2)$ i $Y_1, \dots, Y_n \sim N(\mu_Y, \sigma^2)$. Znajdź przedział ufności dla różnicy $\mu_X - \mu_Y$ na poziomie ufności $1 - \alpha$.

($X_1, \dots, X_m$ i.i.d. $N(\mu_X, \sigma^2)$, $Y_1, \dots, Y_n$ i.i.d. $N(\mu_Y, \sigma^2)$) Compute confidence interval, level $1 - \alpha$, for $\mu_X - \mu_Y$.

Zad 7 Niech $X_1, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$. Znajdź przedział ufności dla λ na poziomie $1 - \alpha$.