

Statystyczna Analiza Danych, zestaw 1

Zad 1 Niech $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$. Wyznacz rozkład zmiennej $S = X_1 + \dots + X_n$.

(Let $X_1, \dots, X_n$ be i.i.d. $\text{Exp}(\lambda)$. Compute the distribution of $S = X_1 + \dots + X_n$).

Zad 2 (rozkład chi-kwadrat) Niech $X_1, X_2, \dots, X_k \stackrel{i.i.d.}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ (tzn. są to niezależne zmienne losowe o rozkładzie normalnym o średniej 0 i wariancji 1). Niech $Q = \sum_{i=1}^k X_i^2$. Oblicz gęstość zmiennej Q .

Hint The area of the unit sphere in $\mathbb{R}^k$ is $\frac{2\pi^{k/2}}{\Gamma(k/2)}$

(Let $X_1, \dots, X_k$ be i.i.d. $N(0, 1)$ Let $Q = \sum_{i=1}^k X_i^2$. Compute the probability density function of the random variable Q).

Zad 3 Niech X będzie zmienną losową o rozkładzie ciągłym i dystrybuancie F .

(a) Znajdź rozkład $F(X)$.

(b) Niech U będzie zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $[0, 1]$. Znajdź rozkład $F^{-1}(U)$.

(Let X be a random variable with continuous distribution F .

(a) Compute the distribution of $F(X)$

(b) Let $U \sim \text{Uniform}[0, 1]$. Compute the distribution of $F^{-1}(U)$).

Zad 4 Niech $X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} \text{Exp}(\lambda)$. Wyznacz rozkład zmiennej $M = \min_i X_i$.

(Let $X_1, \dots, X_n$ be i.i.d. $\text{Exp}(\lambda)$. Compute the distribution of $M = \min_i X_i$).

Zad 5 (*statystyki pozycyjne*) Niech $X_1, \dots, X_n$ będą niezależnymi, ciągłymi zmiennymi losowymi o gęstości f i dystrybuancie F . Niech $X_{(k)}$ będzie k -tą co do wielkości wartością spośród X_i ($i \leq n$). Przedstaw dystrybuantę $X_{(k)}$ oraz udowodnij, że jej gęstość wyraża się wzorem

$$(n-1) \binom{n-1}{k-1} F(x)^{k-1} (1-F(x))^{n-k} f(x)$$

Jaki rozkład ma $X_{(k)}$, jeśli X_i były niezależną próbką z rozkładu $U(0, 1)$?

(Order statistics. Let $X_1, \dots, X_n$ be i.i.d. continuous random variables, with density f and cumulative distribution function F . Let $X_{(k)}$ denote the k th order statistic (that is, $X_1, \dots, X_n$ are re-ordered so that $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$.) Prove that $X_{(k)}$ has density:

$$(n-1) \binom{n-1}{k-1} F(x)^{k-1} (1-F(x))^{n-k} f(x)$$

and give this explicitly when $X_i \sim U(0, 1)$.)

Zad 6 Niech $X_1, \dots, X_n$ będą niezależnymi zmiennymi o tym samym rozkładzie, wartości oczekiwanej μ i wariancji σ^2 . Oblicz

(a) Wartość oczekiwaną i wariancję $\bar{X} := \sum_{i=1}^n X_i$

(b) Wartość oczekiwaną $\tilde{S}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

(Let $X_1, \dots, X_n$ be independent random variables, each with expected value μ and variance σ^2 . Compute

(a) the expectation and variance of $\bar{X} = \sum_{j=1}^n X_j$

(b) the expected value of $\tilde{S}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$.)

Zad 7 (*rozkłady Gamma i Beta*) Niech $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$ i $Y \sim \text{Gamma}(\beta, \lambda)$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Niech $S = X+Y$, $R = \frac{X}{X+Y}$. Udowodnij, że S i R są niezależne oraz $S \sim \text{Gamma}(\alpha + \beta, \lambda)$ i $R \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$.

(Gamma and Beta distributions) Let $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$ and $Y \sim \text{Gamma}(\beta, \lambda)$ be independent random variables. Let $S = X+Y$ and $R = \frac{X}{X+Y}$. Prove that S and R are independent and that $S \sim \text{Gamma}(\alpha + \beta, \lambda)$ and $R \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$.)