

Analiza Matematyczna I.1

Seria 1, P. Nayar, 2011/12

Zadanie 1. Niech $a_k > -1$, ($k = 1, \dots, n$) będą liczbami rzeczywistymi o tym samym znaku. Udowodnij, że prawdziwa jest nierówność

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdot \dots \cdot (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n. \quad (1)$$

Czy założenie, że liczby a_k mają ten sam znak i $a_k > -1$ jest potrzebne?

Rozwiązanie. Podamy dowód indukcyjny. Dla $n = 1$ nierówność (1) ma postać $1 + a_1 \geq 1 + a_1$ i jest oczywista. Przypuśćmy zatem, że teza jest prawdziwa dla pewnego $N = n \geq 1$. Korzystając z tego założenia, udowodnimy (1) dla $N = n + 1$. Mamy

$$\begin{aligned} (1 + a_1) \cdot \dots \cdot (1 + a_n)(1 + a_{n+1}) &\geq (1 + a_1 + \dots + a_n)(1 + a_{n+1}) \\ &= 1 + a_1 + \dots + a_{n+1} + (a_1 + \dots + a_n)a_{n+1} \\ &\geq 1 + a_1 + \dots + a_n + a_{n+1}. \end{aligned}$$

W powyższym rachunku pierwsza nierówność wynika z założenia indukcyjnego i z faktu, że $1 + a_{n+1} \geq 0$, a druga z faktu, że liczby a_i dla $i = 1, \dots, n+1$ mają ten sam znak. $\square$

Przypadek $n = 2$ pokazuje, że liczby a_1, a_2 muszą mieć ten sam znak. Założenie $a_i > -1$, $i = 1, \dots, n$ jest również potrzebne. Wystarczy rozważyć liczby $a_1 = \dots = a_n = -3$ i $n \geq 3$ nieparzyste.

Uwaga. W nierówności (1) mamy równość tylko dla $k = 1$. Jeżeli $a_1 \neq 0$, to założenie równości w kroku indukcyjnym wymusza $a_{n+1} = 0$ dla $n \geq 1$.

Zadanie 2. (Nierówność Bernoulliego) Udowodnij, że dla $x > -1$ i $k \in \mathbb{Z}$ prawdziwa jest nierówność

$$(1 + x)^k \geq 1 + kx. \quad (2)$$

Udowodnij również, że dla $-1 < x < \frac{1}{n}$ i $n \in \mathbb{N}$ prawdziwe jest oszacowanie

$$(1 + x)^n \leq \frac{1}{1 - nx}. \quad (3)$$

Rozwiązanie. Dla $k = 0$ teza jest oczywista. Dla $k > 0$ nierówność (2) wynika z nierówności (1), wystarczy przyjąć $a_1 = \dots = a_n = x$. Udowodnimy (2) dla $k = -n$, gdzie $n > 0$. Jeśli $1 - nx \leq 0$, to

$$(1+x)^{-n} \geq 0 \geq 1-nx.$$

Rozważmy zatem przypadek, gdy $1 - nx > 0$. Wówczas nierówność (2) jest równoważna nierówności (3). Udowodnimy nierówność

$$(1+x)^{-n} \geq 1-nx$$

indukcyjnie dla $n \geq 0$. Dla $n = 0$ teza jest oczywista. Zakładając (3) dla pewnego $n \geq 0$ mamy

$$\begin{aligned} (1+x)^{-(n+1)} &= (1+x)^{-n} \frac{1}{1+x} \geq \frac{1-nx}{1+x} \geq (1-nx)(1-x) \\ &= 1 - (n+1)x + nx^2 \geq 1 - (n+1)x. \end{aligned}$$

Uwaga. Analiza dowodu pokazuje, że równość w (2) jest jedynie dla $k = 0, 1$ lub $x = 0$.

Uwaga. Dla $n > 0$ nierówność (2) można udowodnić korzystając z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną (patrz Zadanie 4). Możemy zakładać, że $1 + nx > 0$. Niech $a_1 = 1 + nx, a_2 = \dots = a_n = 1$. Wówczas mamy

$$\sqrt[n]{(1+nx) \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1} \leq \frac{1+nx+n-1}{n} = 1+x.$$

Zadanie 3. (Nierówność Schwarza) Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4)$$

Rozwiązanie. *Sposób I.* Indukcja. Dla $n = 1$ mamy równość. Korzystając z założenia indukcyjnego dla pewnego $n > 0$ mamy

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k b_k \right)^2 &= \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 + 2a_{n+1}b_{n+1} \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right) + a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right) + \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 b_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 a_{n+1}^2 \right) + a_{n+1}^2 b_{n+1}^2 \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n+1} b_k^2 \right). \end{aligned}$$

Skorzystaliśmy również z nierówności $2a_{n+1}b_{n+1}a_kb_k \leq a_k^2b_{n+1}^2 + b_k^2a_{n+1}^2$, $k = 1, \dots, n$, która jest równoważna

$$(a_{n+1}b_k - b_{n+1}a_k)^2 \geq 0.$$

Sposób II. Możemy zakładać, że $\sum_{k=1}^n a_k^2 > 0$. Rozważmy funkcję

$$f(t) = \sum_{k=1}^n (a_k t + b_k)^2 = At^2 + Bt + C,$$

gdzie

$$A = \sum_{k=1}^n a_k^2, \quad B = 2 \sum_{k=1}^n a_k b_k, \quad C = \sum_{k=1}^n b_k^2$$

Oczywiście $f(t) \geq 0$. Zauważmy, że

$$f(t) = A \left(t + \frac{B}{2A} \right)^2 - \frac{B^2 - 4AC}{4A}.$$

Mamy

$$f\left(-\frac{B}{2A}\right) = -\frac{B^2 - 4AC}{4A} \geq 0.$$

Mamy $A > 0$, zatem $B^2 - 4AC \leq 0$, co jest równoważne (4).

Zadanie 4. (Nierówność między średnimi) Niech $a_1, a_2, \dots, a_n$ będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Udowodnij nierówność

$$\sqrt[n]{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}.$$

Rozwiązanie. Pierwsza nierówność wynika z (4). Wystarczy przyjąć $b_1 = \dots = b_n = 1/n$. Trzecia nierówność jest równoważna drugiej poprzez zamianę a_i na $1/a_i$ dla $i = 1, \dots, n$. Pozostaje zatem udowodnić nierówność

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}. \quad (5)$$

Sposób I. Niech $\lambda > 0$. Zauważmy, że (5) dla $a_1, \dots, a_n$ i dla $\lambda a_1, \dots, \lambda a_n$ są równoważne. Przyjmując $\lambda = (\prod_{i=1}^n a_i)^{-1/n}$ możemy bez straty ogólności zakładać, że $\prod_{i=1}^n a_i = 1$. Innymi słowy, jeśli udowodnimy

$$b_1 + \dots + b_n \geq n$$

dla liczb $b_1, \dots, b_n$ spełniających $\prod_{i=1}^n b_i = 1$, to biorąc $b_i = a_i / (\prod_{j=1}^n a_j)^{1/n}$ otrzymamy

$$a_1 + \dots + a_n \geq n \left(\prod_{j=1}^n a_j \right)^{1/n},$$

czyli (5). Pozostaje zatem udowodnić

Lemat. Jeśli $a_1, \dots, a_n > 0$ i $a_1 \cdot \dots \cdot a_n = 1$, to $a_1 + \dots + a_n \geq n$.

Dowód. Indukcja. Dla $n = 1$ nierówność jest oczywista. Przypuśćmy, że potrafimy udowodnić tezę dla $n - 1$, gdzie $n \geq 1$. Jeśli $a_1 = \dots = a_n$, to $a_i = 1$ dla $i = 1, \dots, n$ i nie ma czego dowodzić. Niech zatem $m = \min_{i=1, \dots, n} a_i$, $M = \max_{i=1, \dots, n} a_i$ i przypuśćmy, że $m < M$. wówczas $m < 1 < M$. Zmieniając numerację liczb $a_1, \dots, a_n$ możemy zakładać, że $m = a_{n-1}$ i $M = a_n$. Rozważmy liczby $a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}a_n$. Stosując założenie indukcyjne mamy

$$\begin{aligned} a_1 + \dots + a_n &= a_1 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1}a_n + a_{n-1} + a_n - a_{n-1}a_n \\ &\geq n - 1 + a_{n-1} + a_n - a_{n-1}a_n \\ &= n - (1 - m)(1 - M) \geq n. \quad \square \end{aligned}$$

Sposób II. Udowodnimy najpierw (5) dla $n = 2^m$, $m \geq 0$. Dla $m = 0$ teza jest oczywista. Przypuśćmy, że potrafimy pokazać nierówność dla pewnego m i rozważmy liczby $a_1, \dots, a_{2^m}, a_{2^m+1}, \dots, a_{2^{m+1}}$. Wówczas

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + \dots + a_{2^{m+1}}}{2^{m+1}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{a_1 + \dots + a_{2^m}}{2^m} + \frac{a_{2^m+1} + \dots + a_{2^{m+1}}}{2^{m+1}} \right) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\sqrt[2^m]{a_1 \dots a_{2^m}} + \sqrt[2^m]{a_{2^m+1} \dots a_{2^{m+1}}} \right) \\ &\geq \sqrt{\sqrt[2^m]{a_1 \dots a_{2^m}} \cdot \sqrt[2^m]{a_{2^m+1} \dots a_{2^{m+1}}}} \\ &= \sqrt[2^{m+1}]{a_1 \dots a_{2^{m+1}}}, \end{aligned}$$

gdzie skorzystaliśmy z nierówności $\frac{1}{2}(a + b) \geq \sqrt{ab}$, $a, b \geq 0$, równoważnej $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$.

Weźmy teraz dowolne $n > 0$. Wówczas istnieje $m \geq 0$ takie, że $n < 2^m$. Niech $A = (a_1 + \dots + a_n)/n$. Rozważmy następujące 2^m liczb

$$a_1, a_2, \dots, a_n, A, A, \dots, A,$$

gdzie A występuje $2^m - n$ razy. Stosując nierówność (5) dla tych liczb, otrzymujemy

$$A = \frac{a_1 + \dots + a_n + (2^m - n)A}{2^m} \geq \sqrt[2^m]{a_1 \dots a_n A^{2^m - n}},$$

co jest równoważne $A^n \geq a_1 \cdot \dots \cdot a_n$. $\square$

Sposób III. Jeśli $a_1 = \dots = a_n$, bo średnia arytmetyczna tych liczb jest równa średniej geometrycznej. Rozważmy zatem przypadek, w którym nie wszystkie liczby są równe. Niech $A = (a_1 + \dots + a_n)/n$. Wówczas istnieją $1 \leq i, j \leq n$ takie, że $a_i < A < a_j$. Wprowadźmy pomocnicze oznaczenie $a = i = b, a_j = c$. Niech $0 \leq \varepsilon \leq c - b$. Rozważmy liczby $b_\varepsilon = b + \varepsilon$ i $c_\varepsilon = c - \varepsilon$. Jeśli zamienimy liczby b, c na $b_\varepsilon, c_\varepsilon$, to suma tych dwóch liczb się nie zmieni, a zatem również średnia arytmetyczna wszystkich liczb pozostanie równa A . Natomiast iloczyn tych dwóch liczb, a zatem również iloczyn wszystkich liczb wzrośnie. Faktycznie, nierówność $bc \leq (b + \varepsilon)(c - \varepsilon)$ jest równoważna nierówności $0 \leq \varepsilon \leq c - b$. Weźmy teraz $\varepsilon = A - b$. Równocześnie $0 \leq \varepsilon$, bo $A \geq b$ i $\varepsilon \leq c - b$, bo $A \leq c$. Jeśli w sytuacji początkowej było $0 \leq l < n$ liczb równych A , to po opisanej zamianie jest tych liczb co najmniej $l + 1$ takich liczb (może się zdarzyć, że $b_\varepsilon = c_\varepsilon = A$ i wtedy są już $l + 2$ liczby równe A). Wystarczy zatem powtórzyć to rozumowanie najwyżej $n - 1$ razy, aby wszystkie liczby stały się równe A . Wówczas A jest też równe średniej geometrycznej liczb. W każdym kroku średnia arytmetyczna jest ustalona, a średnia geometryczna rośnie. Zatem na początku musiało być

$$A \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n}. \quad \square$$

Zadanie 5. (Nierówność Czebyszewa) Udowodnij, że jeśli ciągi $a_1, a_2, \dots, a_n$ i $b_1, b_2, \dots, b_n$ są niemalejące lub nierosnące, to

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k \right) \leq n \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

Co można powiedzieć, jeśli jeden z tych ciągów jest nierosnący, a drugi niemalejący?

Rozwiązanie. Zauważmy, że dla $1 \leq i, j \leq n$ mamy $(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$, zatem

$$\sum_{i,j} (a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0,$$

czyli

$$2n \sum_{i=1}^n a_i b_i \geq 2 \sum_{i,j} a_i b_j = 2 \left(\sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k \right).$$

Jeśli jeden z ciągów jest rosnący, a drugi malejący, to oczywiście prawdziwa

jest nierówność

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k\right) \geq n \sum_{k=1}^n a_k b_k. \quad \square$$

Zadanie 6. Ustalmy liczby dodatnie $x_1, x_2, \dots, x_k$. Niech

$$a_n = x_1^n + x_2^n + \dots + x_k^n.$$

- Udowodnij, że ciąg $(a_n)_{n \geq 0}$ jest log-wypukły, tzn. $a_i^2 \leq a_{i-1} a_{i+1}$.
- Udowodnij, że jeśli ciąg $(c_n)_{n \geq 0}$ jest log-wypukły i $c_0 = 1$, to ciąg $(\sqrt[n]{c_n})_{n \geq 0}$ jest rosnący.
- Udowodnij, że ciąg $(\sqrt[n]{\frac{a_n}{k}})_{n \geq 0}$ jest rosnący, czyli

$$\sqrt[p]{\frac{x_1^p + x_2^p + \dots + x_k^p}{k}} \leq \sqrt[q]{\frac{x_1^q + x_2^q + \dots + x_k^q}{k}}$$

dla $0 \leq p \leq q$, $p, q \in \mathbb{N}$.

- Udowodnij, że dla $0 < \alpha \leq \beta$ prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt[\beta]{x_1^\beta + x_2^\beta + \dots + x_k^\beta} \leq \sqrt[\alpha]{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \dots + x_k^\alpha}.$$

Rozwiązanie. a) Wystarczy skorzystać z nierówności Schwarza dla $a_i = x_i^{(n-1)/2}$ i $b_i = x_i^{(n+1)/2}$, $i = 1, \dots, n$.

b) Mnożąc nierówności $c_i^{2i} \leq c_{i-1}^i c_{i+1}^i$ dla $i = 1, \dots, n$ stronami otrzymujemy

$$\prod_{i=1}^n c_i^{2i} \leq \prod_{i=1}^n c_{i-1}^i c_{i+1}^i = \prod_{i=0}^{n-1} c_i^{i+1} \prod_{i=2}^{n+1} c_i^{i-1} = c_0 c_1^2 c_n^{n-1} c_{n+1}^n \prod_{i=2}^{n-1} c_i^{2i} = c_n^{n-1} c_{n+1}^n \prod_{i=1}^{n-1} c_i^{2i},$$

czyli $c_n^{2n} \leq c_n^{n-1} c_{n+1}^n$. Stąd $\sqrt[n]{c_n} \leq \sqrt[n+1]{c_{n+1}}$. Zatem ciąg $(\sqrt[n]{c_n})_{n \geq 0}$ jest niemalejący.

c) Wynika to faktu, że ciąg $c_n = a_n/k$ jest log-wypukły i $c_0 = 1$.

d) Niech $t = \beta/\alpha \geq 1$ i niech $y_i = x_i^\alpha$ dla $i = 1, \dots, n$. Przy tych oznaczeniach nasza nierówność jest równoważna nierówności

$$y_1^t + \dots + y_n^t \leq (y_1 + \dots + y_n)^t.$$

Niech $p_i = y_i/(y_1 + \dots + y_n)$ dla $i = 1, \dots, n$. Wówczas $0 < p_i \leq 1$ i musimy udowodnić, że $\sum_{i=1}^n p_i^t \leq 1$. Wystarczy teraz zauważyć, że

$$\sum_{i=1}^n p_i^t \leq \sum_{i=1}^n p_i = 1. \quad \square$$

Zadanie 7. Udowodnij, że dla dowolnych liczb zespolonych $z_1, \dots, z_n$ prawdziwa jest nierówność

$$|z_1 + \dots + z_n| \leq |z_1| + \dots + |z_n|.$$

Rozwiązanie. Nierówność wystarczy udowodnić dla $n = 2$ (później indukcja). Możemy zakładać, że $|z_1 + z_2| > 0$. Dla dowolnej liczby zespolonej z prawdziwa jest nierówność $\operatorname{Re} z \leq |z|$. Stąd

$$\begin{aligned} \left| \frac{z_1}{z_1 + z_2} \right| + \left| \frac{z_2}{z_1 + z_2} \right| &\geq \operatorname{Re} \left(\frac{z_1}{z_1 + z_2} \right) + \operatorname{Re} \left(\frac{z_2}{z_1 + z_2} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{z_1}{z_1 + z_2} + \frac{z_2}{z_1 + z_2} \right) = 1. \quad \square \end{aligned}$$