Diagonalizacja macierzy cyklicznej

Piotr Nayar

Opiszemy teraz standardową technikę diagonalizacji symetrycznej macierzy $(M)_{i,j=1,\ldots,n}$, która spełnia $M_{js} = c_{n-j+1+s}$. Przyjmujemy, że dla $m \in \mathbb{Z}$ mamy $c_{nm+s} = c_s$. Wypiszmy jawnie macierz M:

$$(M)_{i,j=1,\ldots,n} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ c_n & c_1 & \cdots & c_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_2 & c_3 & \cdots & c_1 \end{bmatrix}.$$

Weźmy macierz $(\Delta)_{k,j=1,\ldots,n} = e^{2\pi i(k-1)(j-1)/n}$, czyli

$$(\Delta)_{k,j=1,\ldots,n} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1} \end{bmatrix},$$

gdzie $r_k = e^{2\pi i(k-1)/n}$. Macierz Δ jest symetryczna. Rozważmy macierz $P = M\Delta$. Mamy

$$P_{jk} = \sum_{s=1}^{n} c_{N-j+1+s} r_k^{s-1} = r_k^{j-1} \sum_{s=1}^{n} c_{N-j+1+s} r_k^{s-j} = r_k^{j-1} \sum_{p=1}^{n} c_p r_k^{p-1}.$$

Oczywiście $r_k^{nm+s} = r_k^s$. Jeśli zdefiniujemy

$$f(r_k) = \sum_{s=1}^{n} c_s r_k^{s-1},$$

to

$$P_{jk} = r_k^{j-1} f(r_k) = r_j^{k-1} f(r_k) = \sum_{l=1}^{n} r_j^{l-1} f(r_l) \delta_{l,k},$$

dlatego $P = \Delta D$, gdzie $D = \operatorname{diag}(f(r_1), \ldots, f(r_n))$. Zatem $M\Delta = \Delta D$. Macierz Δ jest odwracalna (wyznacznik Vandermonde'a), zatem

$$D = \Delta^{-1} M \Delta.$$

Zauważmy, że macierz $\frac{1}{\sqrt{n}}\Delta$ jest unitarna, czyli $\Delta^\star = n\Delta^{-1}$. Faktycznie,

$$(\Delta^\star \Delta)_{jk} = \sum_{l=0}^{n-1} e^{2\pi i j l/n} e^{-2\pi i l k/n} = \sum_{l=0}^{n-1} e^{2\pi i l(j-k)l/n} = n\delta_{jk}.$$

Wykorzystamy teraz informację, że macierz M jest symetryczna. Równość $M_{jk} = M_{kj}$ implikuje $c_{n-j+1+k} = c_{n-k+1+j}$. Podstawiając $j = 1$ mamy

$$c_{n+k} = c_k = c_{n-k+2}.$$

Mamy

$$\lambda_k = f(r_k) = \sum_{s=1}^{n} c_s r_k^{s-1} = \sum_{s=1}^{n} c_{n-s+2} r_k^{s-1} = \sum_{p=1}^{n} c_p r_k^{n-p+1} = \sum_{p=1}^{n} c_p r_{n-k+2}^{p-1} = \lambda_{n-k+2}.$$

Skorzystaliśmy z tożsamości $r_k^{n-p+1} = r_{n-k+2}^{p-1}$. Zatem λ_1 jest w ogólnym przypadku jednokrotna, zaś $\lambda_2 = \lambda_n$, $\lambda_3 = \lambda_{n-1}, \ldots$. Jeśli n jest parzyste, to $\lambda_{\frac{1}{2}n+1}$ jest również jednokrotna. Wartości własne λ_k są rzeczywiste

$$\begin{aligned}\lambda_k &= \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}(c_s + c_{n-s+2}) r_k^{s-1} = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} c_s (r_k^{s-1} + r_k^{n-s+1}) \\ &= \sum_{s=1}^{n} c_s \frac{e^{2\pi i(k-1)(s-1)/n} + e^{2\pi i(k-1)(n-s+1)/n}}{2} = \sum_{s=1}^{n} c_s \cos[(k-1)(s-1)/n].\end{aligned}$$

Wektory własne danę są przez macierz Δ. Wartości λ_k odpowiada wektor własny $(r_k^{s-1})_{s=1,\ldots,n}$. Ponieważ $\lambda_k = \lambda_{n-k+2}$, więc wektory własne odpowiadające dwuwymiarowej podprzestrzeni własnej to

$$(\alpha_1 e^{2\pi i(k-1)(s-1)/n} + \alpha_2 e^{2\pi i(s-1)(n-k+1)/n})_s = (\alpha_1 e^{2\pi i(k-1)(s-1)/n} + \alpha_2 e^{-2\pi i(k-1)(s-1)/n})_s.$$

Wektory własne odpowiadające λ_1 i $\lambda_{\frac{1}{2}n+1}$ są zawsze rzeczywiste, bo dla λ_1 jest to oczywiste, dla $\lambda_{\frac{1}{2}n+1}$ mamy $r_{\frac{1}{2}n+1}^{s-1} = e^{2\pi i(s-1)\frac{1}{2}n/n} = e^{\pi i(s-1)}$. Macierz Δ należy pomnożyć przez macierz D' złożoną z dwóch klatek 1×1 (pojedyncze wartości własne) i klatek

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{i\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{i\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{i\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{i\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

odpowiadających podwójnym wartościom własnym. Macierz DD' jest unitarna i rzeczywista, bo macierze D, D' są unitarne oraz

$$\begin{aligned}&(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{i\sqrt{2}}) e^{2\pi i(k-1)(s-1)/n} + (\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{i\sqrt{2}}) e^{-2\pi i(k-1)(s-1)/n} \\ &\qquad = \sqrt{2}(2\pi \cos[(k-1)(s-1)/n] + \sin[2\pi(k-1)(s-1)/n]),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{i\sqrt{2}}) e^{2\pi i(k-1)(s-1)/n} + (\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{i\sqrt{2}}) e^{-2\pi i(k-1)(s-1)/n} \\ &\qquad = \sqrt{2}(\cos[2\pi(k-1)(s-1)/n] - \sin[2\pi(k-1)(s-1)/n]),\end{aligned}$$

Zatem wartości własnej

$$\lambda_k = \sum_{s=1}^{n} c_s \cos[2\pi(k-1)(s-1)/n]$$

odpowiada wektor własny

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}}(\cos[2\pi(k-1)(s-1)/n] + \sin[2\pi(k-1)(s-1)/n])\right)_{s=1,\ldots,n}$$

(k=1,2...,n). Oczywiście pamiętamy, że $\lambda_k = \lambda_{n-k+2}$. Aby sprawdzić unormowanie należy rozpisać sin i cos w eksponenty i policzyć odpowiednią sumę kwadratów.