dr Marta Szumańska
Instytut Matematyczny PAN w Warszawie
Instytut Matematyki UW (urlop)

Geometryczne energie krzywiznowe

Małe Ciche, 11–22 września 2017

Geometryczne energie krzywiznowe to funkcjonały przypisujące krzywej lub powierzchni pewną wartość, która zależy od kształtu rozpatrywanego obiektu. Najprostszym do opisania przykładem takiej energii jest rozważana przez Milnora całka po krzywej zamkniętej klasy C^2 z klasycznej krzywizny. Mimo iż zamierzam przedstawić twierdzenie Fáry-Milnora, które jest historycznie pierwszym wynikiem łączącym pewną energię całkową z topologią krzywej, to klasyczna krzywizna będzie się pojawiać podczas kursu marginalnie. Skupimy się głównie na energiach krzywiznowych, które można rozpatrywać dla dowolnych krzywych lipschitzowskich, a więc obiektów mniej regularnych, dla których klasyczna krzywizna nie jest zdefiniowana. Konstrukcja takich energii opiera się na oddziaływaniach odpychających układów dwu i więcej ciał, a swój początek wzięły one z problemów związanych z modelowaniem obiektów fizycznych.

Większą część kursu zamierzam poświęcić energiom węzłowym, tzn. takim, które są użyteczne przy badaniu topologii krzywych. Podstawowym rozpatrywanym zagadnieniem będzie wnioskowanie z wartości energii informacji o stopniu skomplikowania węzła, który krzywa reprezentuje. Ponadto chciałabym wspomnieć o problemach wariacyjnych związanych z energiami węzłowymi oraz związkach krzywizny Mengera z ułamkowymi przestrzeniami Sobolewa. Cykl wykładów planuję zakończyć szkicem dowodu hipotezy Vitushkina, w którym krzywizna Mengera odegrała istotną rolę.

O ile ostatni wspomniany element cyklu wymaga znajomości teorii wprowadzanej na wyższych latach studiów (elementy analizy funkcjonalnej, własności funkcji analitycznych argumentu zespolonego), tak do zrozumienia pozostałych zagadnień powinna wystarczyć znajomość materiału pierwszych dwóch lat studiów (głównie analizy i topologii).

Szczegółowy plan wykładu (jest to wstępna wersja cyklu, może ulec pewnym modyfikacjom; w czasie mini-kursu zamierzam poruszyć wszystkie wymienione poniżej zagadnienia, jednak niektóre mogą pojawić się tylko hasłowo).

- Wprowadzenie energii krzywiznowych i ich podstawowych własności - przegląd wyników z prac [SSM] i [FHW],[KSM].
- Energie węzłowe
  - Krótkie wprowadzenie do teorii węzłów. Wprowadzenie pojęcia liczby splotowej (ang. linking number) i średniej liczby przecięciowej (ang. average linking number)
  - Twierdzenie Fáry-Milnora.
  - Globalna krzywizna Mengera a najkrótszy trójlistnik [DDS], oszacowania liczb przecięciowych dla różnych energii
  - energie węzłowe (nie tylko całkowe) i ich własności (przegląd wyników)

- Zagadnienia wariacyjne
  - istnienie krzywych minimalizujących różne energie węzłowe [SSM]
  - wyższa regularność krzywych minimalizujących dla energii O'Hary [FHW]
- (w zależności od dostępności czasu) energie krzywiznowe dla powierzchni i obiektów wyżej wymiarowych
- Całkowa krzywizna Mengera a rozwiązanie hipotezy Vitushkina [D](streszczenie historii problemu wywodzącego się z analizy zespolonej, rozwiązywanego metodami analizy harmonicznej, zwieńczonego twierdzeniem dotyczącym krzywizny Mengera).

Literatura

[D] J. Dudziak *Vitushkin's conjecture for removable sets.* Universitext. Springer, New York, 2010.
[DDS] E. Denne, Y. Diao, J.M. Sullivan *Quadrisecants give new lower bounds for the ropelength of a knot.* Geom. Topol. **10** (2006), 1–26.
[FWH]M. Freedman, Z.-X. He,Z. Wang,*Möbius energy of knots and unknots.* Ann. of Math.(2) **139(1)** (1994), 1–50.
[KSM] S. Kolasiński, P. Strzelecki, H. von der Mosel *Characterizing $W^{2,p}$-submanifolds by p-integrability of global curvatures.* GAFA bf 23 (2013), 937–984.
[SSM] P. Strzelecki. M. Szumanska, H. von der Mosel *On some knot energies involving Menger curvature.* Topology Appl. 160 (2013), 1507–1529.