Marta Strzelecka
Instytut Matematyki UW

UOGÓLNIONA NIERÓWNOŚĆ GRÜNBAUMA

MURZASICHLE, 12-21 WRZEŚNIA 2017

Klasyczna nierówność Grünbauma mówi, że dla każdego ciała (czyli zbioru zwartego o niepustym wnętrzu) wypukłego K w $\mathbf{R}^d$ o środku ciężkości w zerze i każdej takiej półprzestrzeni H, że ∂H zawiera 0, zachodzi

$$\mathrm{vol}_d(K \cap H) \geqslant \left(\frac{d}{d+1}\right)^d \mathrm{vol}_d(K),$$

gdzie vol_l to $l-$wymiarowa objętość. Równość w tej nierówności zachodzi dla stożka i półprzestrzeni przechodzącej przez wierzchołek tego stożka, o brzegu równoległym do podstawy stożka.

Niech $v \in H$ będzie wektorem długości 1 prostopadłym do ∂H. Jeśli zdefiniujemy funkcję $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ wzorem $f(t) := \mathrm{vol}_{d-1}(K \cap (tv + \partial H))$, to nierówność Grünbauma przyjmie postać

$$\int_0^\infty f(t)dt \geqslant \left(\frac{d}{d+1}\right)^d \int_{-\infty}^\infty f(t)dt.$$

Poza tym, zdefiniowana powyżej funkcja f jest nieujemna, log-wklęsła (tzn. funkcja $\log f$ jest wklęsła), całkowalna i taka, że $\int_{-\infty}^\infty tf(t)dt = 0$.

Okazuje się, że prawdziwa jest również funkcyjna wersja nierówności Grünbauma: dla każdej log-wklęsłej, całkowalnej funkcji $f : \mathbf{R} \to [0, \infty)$, takiej że $\int_{-\infty}^\infty tf(t)dt = 0$ zachodzi

$$\int_0^\infty f(t)dt \geqslant e^{-1} \int_{-\infty}^\infty f(t)dt.$$

Oczywiście, przykład stożków pokazuje, że stałej e^{-1} nie można poprawić.

Opierając się na ostatniej pracy Meyera, Nazarova, Ryabogina i Yaskina (*Generalized Grünbaum inequality*, arXiv:1706.02373v1), znajdziemy najlepszą stałą w wielowymiarowym odpowiedniku funkcyjnej wersji nierówności Grünbauma, czyli największe c_n takie, że dla każdej log-wklęsłej, całkowalnej funkcji $f : \mathbf{R}^n \to [0, \infty)$, takiej że $\int_{\mathbf{R}^n} xf(x)dx = 0$, i dla każdego $\theta \in S^{n-1}$ zachodzi

$$\int_0^\infty f(s\theta)ds \geqslant c_n \int_{-\infty}^\infty f(s\theta)dt.$$

Do zrozumienia wykładów wystarczy znajomość kursowych wykładów Analizy i GAL-u z pierwszych dwóch lat studiów.