Struktura permutacji losowych

Michał Kotowski

Wykład będzie poświęcony strukturze permutacji pochodzących z różnych modeli probabilistycznych.

Jako modelowy przykład rozważmy następujący proces losowy: ustalamy n i w każdym kroku wybieramy losowo dwa elementy ze zbioru $\{1, \ldots, n\}$, po czym zamieniamy je miejscami. Po wykonaniu t takich losowych transpozycji otrzymujemy losowę permutację $\pi_t \in S_n$. Będą nas interesować między innymi następujące pytania:

- Jak blisko (w sensie L^1, L^2, ...) permutacja π_t jest jednostajnie losowej permutacji na n elementach, w zależności do czasu t?
- Czy dla czasu mieszania (*mixing time*) takiego łańcucha Markowa występuje zjawisko obcięcia (*cutoff*)?
- Co można powiedzieć o strukturze cyklowej permutacji π_t? Po jakim czasie pojawia się niej cykl makroskopowej długości?
- W jaki sposób własności tego procesu zależą od dopuszczalnych transpozycji?

Szczególną uwagę poświęcimy analizie struktury długich cykli w przypadku, kiedy w każdym kroku dokonujemy transpozycji dowolnych elementów (tzw. *interchange process* na grafie pełnym). Pytanie to (jeśli graf pełny zastąpić kratą $\mathbb{Z}^d$) ma swoją motywację w fizyce statystycznej. Okazuje się, że występuje tu ostre przejście fazowe – przed czasem krytycznym wszystkie cykle mają długość znacznie krótszą niż n, zaś po czasie krytycznym prawie na pewno istnieje cykl długości rzędu n. Co więcej, rozkład długości k najdłuższych cykli jest scharakteryzowany przez tzw. rozkład Poissona-Dirchleta.

Tematyka ta żywo się obecnie rozwija i jest tu wiele dostępnych problemów nie wymagających bardzo zaawansowanej wiedzy na starcie.

W trakcie wykładu zahaczymy o analizę czasu mieszania dla łańcuchów Markowa, teorię grafów losowych (przejście fazowe w grafach Erdősa-Rényi'ego), jeśli starczy czasu, zajmiemy się też innymi modelami permutacji losowych (model Ewensa, model Mallowsa). Do zrozumienia wykładu nie jest konieczna żadna wiedza poza RP I i RP II.