Prof. Krzysztof Oleszkiewicz
Instytut Matematyczny PAN w Warszawie
Instytut Matematyki UW (urlop)

Wokół Twierdzenia FKN

Małe Ciche, 11–22 września 2017

Analiza boolowska bada własności funkcji przyjmujących dwie wartości, a określonych na zbiorze skończonym, najczęściej kostce dyskretnej $\{-1,1\}^n$. Tematyką tą, stanowiącą dział analizy dyskretnej i silnie powiązaną z analizą harmoniczną, kombinatoryką i informatyką teoretyczną, zajmowało się wielu wybitnych matematyków, m.in. Jean Bourgain (medal Fieldsa 1994). Doczekała się opracowań monograficznych ([3]) i wciąż intensywnie się rozwija. Jednym z jej klasycznych już wyników jest udowodnione przez Ehuda **F**riedguta, Gila **K**alaia i Assafa **N**aora tzw. Twierdzenie FKN, [1]. Mówi ono, w pewnym uproszczeniu, że jeśli funkcja $f : \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}$ bliska jest funkcji afinicznej (tj. obcięciu funkcji afinicznej z R^n do $\{-1,1\}^n$), to bliska jest również funkcji stałej bądź którejś z funkcji $x_1, -x_1, x_2, -x_2, \ldots, x_n, -x_n$.

W niedawnej pracy [2] zdołaliśmy wraz z Jackiem Jendrejem i Jakubem O. Wojtaszczykiem na wiele różnych sposobów wzmocnić tezę Twierdzenia FKN, uprościć jego dowód i osłabić założenia. Omówieniu tych właśnie ulepszeń i uogólnień chciałbym poświęcić cykl swoich wykładów.

Metody używane w omawianej pracy są w większości elementarne, więc powinny być zrozumiałe dla absolwentów matematycznych studiów licencjackich. Wskazane jest, by uczestnicy, którzy nie ukończyli takich studiów, zapoznali się przed przyjazdem na zajęcia z podstawowymi pojęciami analizy i teorii prawdopodobieństwa – takimi jak przestrzeń liniowa z normą, nierówność Jensena, iloczyn skalarny, układ ortogonalny, zdarzenie losowe, zmienna losowa i wektor losowy (tj. zmienna losowa przyjmująca wartości wektorowe), niezależność zdarzeń i zmiennych losowych, wartość oczekiwana, wariancja i nierówność Czebyszewa – a także by umieli się nimi w najprostszym chociaż zakresie posługiwać (np. by umieli wartość oczekiwaną sumy zmiennych losowych lub iloczynu niezależnych zmiennych losowych wyrazić za pomocą wartości oczekiwanych poszczególnych zmiennych).

Dowody kolejnych wariantów Twierdzenia FKN, które planuję przedstawić w swoich wykładach, wykorzystują wiele metod i pojęć przydatnych w pracy naukowej, a stosunkowo rzadko omawianych na studiach matematycznych pierwszego i drugiego stopnia. Słuchacze będą więc w naturalny, bo związany z bezpośrednimi zastosowaniami, sposób wprowadzeni w podstawy zagadnień takich jak porównywanie momentów, nierówności Chinczyna i Paleya-Zygmunda, analiza harmoniczna na kostce dyskretnej, hiperkontrakcja, odległość Banacha-Mazura czy elipsoida Johna.

[1] E. Friedgut, G. Kalai i A. Naor, Assaf, *Boolean functions whose Fourier transform is concentrated on the first two levels*, Adv. in Appl. Math. 29 (2002), 427–437.
[2] J. Jendrej, K. Oleszkiewicz, J. O. Wojtaszczyk, *On some extensions of the FKN theorem*, Theory Comput. 11 (2015), 445–469.
[3] R. O'Donnell, *Analysis of Boolean functions*, Cambridge University Press, New York, 2014.