Liga zadaniowa

Seria I, 2014/2015, Piotr Nayar, Marta Strzelecka

Pytania dotyczące zadań prosimy kierować do Piotra Nayara na adres: nayar@mimuw.edu.pl. Rozwiązania można przesyłać Marcie Strzeleckiej na adres martast@mimuw.edu.pl, przynosić do pokoju 4500 lub zostawiać w skrytce przy sekretariatach (w przegródce Marty Strzelckiej).

Zadanie 1. (**A**) Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą dodatnimi liczba rzeczywistymi. Udowodnij, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$f(p) = \ln(a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p)$$

jest wypukła.

Zadanie 2. (**G+K**) Niech $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ będzie macierzą $n \times n$ o współczynnikach spełniających $a_{ij} \in \{-1, 1\}$.

(i) Udowodnij, że $|\det A| \leq n^{n/2}$.

(ii) Załóżmy, że $n \geq 4$ i $|\det A| = n^{n/2}$. Wykaż, że $4|n$. Podaj przykład takiej macierzy dla $n = 12$.

Zadanie 3. (**A**) Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną i niech $A \subset X$. Załóżmy, że funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest 1-lipschitzowska na A, czyli

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|, \qquad x_1, x_2 \in A.$$

Rozstrzygnij, czy zawsze istnieje funkcja $F : X \to \mathbb{R}$ taka, że $F|_A = f$ oraz

$$|F(x_1) - F(x_2)| \leq |x_1 - x_2|, \qquad x_1, x_2 \in X.$$

Zadanie 4. (**A**) Niech $P : [-1, 1] \to [-1, 1]$ będzie wielomianem stopnia $n \geq 0$. Udowodnij, że $|P'(x)| \leq n^2$ dla $x \in [-1, 1]$.

Zadanie 5. (**K**) Niech $A_1, A_2, \ldots, A_n$ będą parami różnymi podzbiorami zbioru $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$. Udowodnij, że istnieje element $x \in [n]$ taki, że zbiory

$$A_1 \setminus \{x\}, \quad A_2 \setminus \{x\}, \quad \ldots \ , \quad A_n \setminus \{x\}$$

są parami różne.

Zadanie 6. (**G**) Niech A, B będą macierzami symetrycznymi takimi[1], że $A > B > 0$.

(i) Udowodnij, że $A^{-1} < B^{-1}$.

(ii) Udowodnij, że $A + A^{-1} \geq 2I$.

[1] $A > B$ oznacza, że $A - B$ jest dodatnio określona. Podobnie $A \geq B$ oznacza, że $A - B$ jest nieujemnie określona.

Liga zadaniowa

Seria II, 2014/2015, Piotr Nayar, Marta Strzelecka

Pytania dotyczące zadań prosimy kierować do Piotra Nayara na adres: nayar@mimuw.edu.pl. Rozwiązania można przesyłać Marcie Strzeleckiej na adres martast@mimuw.edu.pl, przynosić do pokoju 4500 lub zostawiać w skrytce przy sekretariatach (w przegródce Marty Strzeleckiej).

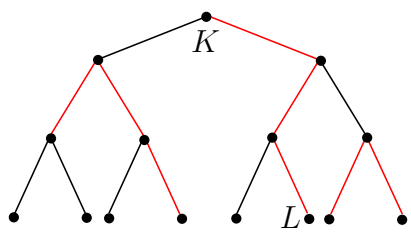
Zadanie 1. (**G**) Niech A, B będą rzeczywistymi macierzami $n \times n$ spełniającymi warunek $\det(A+B) \geq 0$ i $AB = BA$. Udowodnij, że $\det(A^k + B^k) \geq 0$ dla wszystkich $k \geq 1$.

Zadanie 2. (**A**) Niech $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ będzie macierzą $n \times n$ o dodatnich współczynnikach. Załóżmy, że $\sum_{i,j=1}^n a_{ij} = 1$. Niech $p_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ oraz $q_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}$. Udowodnij nierówność

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \ln(a_{ij}) \geq \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i) + \sum_{j=1}^n q_j \ln(q_j)$$

i scharakteryzuj przypadki, w których powyższa nierówność staje się równością.

Zadanie 3. (**A+K**) Każdą krawędź drzewa binarnego o wysokości $n \geq 1$ kolorujemy na czerwono z prawdopodobieństwem $p \in [0,1]$ lub na czarno z prawdopodobieństwem $1-p$. Niech p_n oznacza prawdopodobieństwo, że istnieje liść połączony z korzeniem czerwoną ścieżką. Wyznacz $\lim_{n\to\infty} p_n$ jako funkcję parametru p.



Rysunek 1: Drzewo binarne o wysokości $n = 3$. Liść L jest połączony z korzeniem K czerwoną ścieżką.

Zadanie 4. (**K**) Rozważmy nieskończone słowa nad pewnym skończonym alfabetem $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Skończone podsłowo (ciąg kolejnych liter w danym słowie) postaci $\{a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k}a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k}\}$, $k \geq 1$, nazywamy powtórzeniem. Dla przykładu, w słowie $ABCBACBAC$... nad alfabetem $\{A, B, C\}$ podsłowo $CBACBA$ jest powtórzeniem.

Wyznacz wszystkie liczby naturalne n o tej własności, że istnieje słowo nad alfabetem n elementowym, w którym nie występują powtórzenia.

Zadanie 5. (**G+K**) Niech $G = (V, E)$ będzie skończonym grafem nieskierowanym o zbiorze wierzchołków $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Definiujemy $a_{ij} = 1$ jeśli pomiędzy wierzchołkami v_i, v_j jest krawędź oraz $a_{ij} = 0$ w przeciwnym przypadku. Załóżmy, że znane są wartości własne $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ macierzy $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ (traktowane jako multizbiór, w którym każda wartość własna występuje tyle razy, ile wynosi jej krotność).

(i) Czy liczby te wyznaczają jednoznacznie liczbę krawędzi w grafie G?

(ii) Czy wyznaczają one jednoznacznie liczbę spójnych składowych w grafie G?

Zadanie 6. (**A+G**) Niech C będzie rzeczywistą macierzą $n \times k$. Udowodnij, że macierz $C^T C$ ma rzeczywiste i nieujemne wartości własne $s_1^2(C), \ldots, s_n^2(C)$. Ustalmy $1 \leq p < \infty$ i zdefiniujmy $\|C\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |s_i(C)|^p\right)^{1/p}$. Niech A, B będą rzeczywistymi macierzami $n \times k$. Udowodnij nierówność $\|A+B\|_p \leq \|A\|_p + \|B\|_p$.

Liga zadaniowa

Seria III, 2014/2015, Piotr Nayar, Marta Strzelecka

Pytania dotyczące zadań prosimy kierować do Piotra Nayara na adres: nayar@mimuw.edu.pl. Rozwiązania można przesyłać Marcie Strzeleckiej na adres martast@mimuw.edu.pl, przynosić do pokoju 4500 lub zostawiać w skrytce przy sekretariatach (w przegródce Marty Strzeleckiej).

Zadanie 1. (**K**) Niech $m \geq 1$ będzie liczbą całkowitą. Definiujemy ciąg $(a_n)_{n\geq 0}$ rekurencyjnie, $a_0 = a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + e^{2\pi i n/m} a_{n-1}$. Udowodnij, że dla $n \geq m$ prawdziwa jest równość $a_{n+m} = a_n + a_{n-m}$.

Zadanie 2. (**A**) Rozważmy ciąg liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n$ o tej własności, że $|a_i - a_{i+1}| \leq 1$ dla $i = 1, \ldots, n-1$. Załóżmy ponadto, że $\sum_{i=1}^n a_i = 0$. Udowodnij nierówność $\sum_{i=1}^n a_i^2 \leq \frac{1}{12} n(n^2-1)$.

Zadanie 3. (**G**) Niech $\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \ldots \geq \lambda_n(A)$ będą wartościami własnymi macierzy symetrycznej $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ (licząc z powtórzeniami). Rozważmy macierz $B = (a_{ij})_{i,j=1}^{n-1}$ i niech $\lambda_1(B) \geq \lambda_2(B) \geq \ldots \geq \lambda_{n-1}(B)$ będą wartościami własnymi macierzy B. Udowodnij, że

$$\lambda_1(A) \geq \lambda_1(B) \geq \lambda_2(A) \geq \lambda_2(B) \geq \ldots \geq \lambda_{n-1}(A) \geq \lambda_{n-1}(B) \geq \lambda_n(A).$$

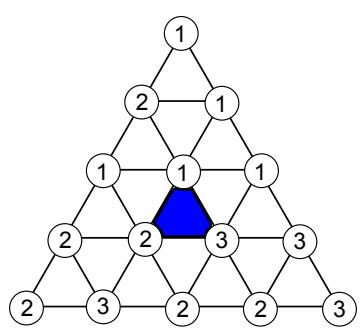
Zadanie 4. (**G+K**) Niech $m = m(n,k)$ będzie największą liczbą naturalną o następującej własności: istnieje zbiór $\{v_1, \ldots, v_m\} \subset \mathbb{R}^n$ taki, że wyrażenia $|v_i - v_j|$ dla $i \neq j$ przyjmują najwyżej k różnych wartości, gdzie $|\cdot|$ jest odległością euklidesową.

(i) Wykaż, że $m(n,1) = n+1$.

(ii) Wykaż, że $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} m(n,2) = \frac{1}{2}$.

Zadanie 5. (**A**) Niech $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będzie wielomianem, czyli $P(x,y) = \sum_{i,j=0}^n a_{ij} x^i y^j$ dla pewnej liczby naturalnej n i liczb rzeczywistych a_{ij}. Czy może się zdarzyć, że $P(\mathbb{R}^2) = (0, \infty)$?

Zadanie 6. (**K**) Rozważmy trójkąt równoboczny podzielony na n^2 *małych trójkątów* równobocznych (tak jak na Rysunku 1). Podział ten indukuje graf T_n. Wierzchołki tego grafu numerujemy liczbami ze zbioru $\{1,2,3\}$, przy czym wierzchołki dużego trójkąta mają kolejno numery $1,2,3$. Ponadto, na boku dużego trójkąta, którego końce mają numery 1 i 2, mogą znajdować się jedynie wierzchołki z numerami 1 i 2. Analogicznie dla pozostałych dwóch boków. Udowodnij, że w T_n istnieje *mały trójkąt*, którego wierzchołki mają numery $1,2$ i 3.



Rysunek 1: Graf T_n dla $n = 4$. Zaznaczono *mały trójkąt* mający wierzchołki z numerami $1,2,3$.

Liga zadaniowa

Seria IV, 2014/2015, Piotr Nayar, Marta Strzelecka

Pytania dotyczące zadań prosimy kierować do Piotra Nayara na adres: nayar@mimuw.edu.pl. Rozwiązania można przesyłać Marcie Strzeleckiej na adres martast@mimuw.edu.pl, przynosić do pokoju 4500 lub zostawiać w skrytce przy sekretariatach (w przegródce Marty Strzeleckiej).

Zadanie 1. (**G+K**) Niech $m > n$ i niech $A_1, \ldots, A_m$ będą niepustymi podzbiorami zbioru $\{1, \ldots, n\}$. Udowodnij, że istnieją rozłączne i niepuste podzbiory $I, J \subset \{1, \ldots, m\}$ takie, że $\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{j \in J} A_j$.

Zadanie 2. (**A**) Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ będzie funkcją wypukłą. Zdefiniujmy funkcję $\mathcal{L}f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ wzorem $(\mathcal{L}f)(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}}(xy - f(y))$. Udowodnij, że $\mathcal{L}f$ jest funkcją wypukłą. Wykaż również, że $\mathcal{L}(\mathcal{L}f) = f$.

Zadanie 3. (**A+G**) Niech A, B będą dodatnio określonymi macierzami $n \times n$. Udowodnij nierówność

$$\det(A + B)^{\frac{1}{n}} \geq \det(A)^{\frac{1}{n}} + \det(B)^{\frac{1}{n}}.$$

Zadanie 4. (**G+K**) Niech $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ będzie zbiorem n punktów przestrzeni $\mathbb{R}^d$. Udowodnij, że istnieje punkt $x \in \mathbb{R}^d$ o tej własności, że każda domknięta półprzestrzeń zawierająca punkt x zawiera co najmniej $\left\lceil \frac{n}{d+1} \right\rceil$ punktów ze zbioru A.

Zadanie 5. (**A**) Niech $z_1, z_2, \ldots$ będzie zbieżnym do zera ciągiem liczb zespolonych. Rozstrzygnij, czy zawsze istnieje ciąg znaków $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \in \{-1, 1\}$ o tej własności, że $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n z_n$ jest zbieżny.

Zadanie 6. (**G+K**) Wyznacz najmniejszą liczbę $r_d > 0$ o następującej własności: dla każdego zbioru domkniętego $K \subseteq \mathbb{R}^d$ o średnicy 1 istnieje kula euklidesowa $B \subseteq \mathbb{R}^n$ o promieniu r_d taka, że $K \subseteq B$.

Liga zadaniowa

Seria V, 2014/2015, Piotr Nayar, Marta Strzelecka

Pytania dotyczące zadań prosimy kierować do Piotra Nayara na adres: nayar@mimuw.edu.pl. Rozwiązania można przesyłać Marcie Strzeleckiej na adres martast@mimuw.edu.pl, przynosić do pokoju 4500 lub zostawiać w skrytce przy sekretariatach (w przegródce Marty Strzeleckiej).

Zadanie 1. (**A**) Niech $a_1, a_2, \ldots$ będzie ciągiem dodatnich liczb rzeczywistych. Udowodnij nierówność

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{1+a_{n+1}}{a_n}\right)^n \geq e.$$

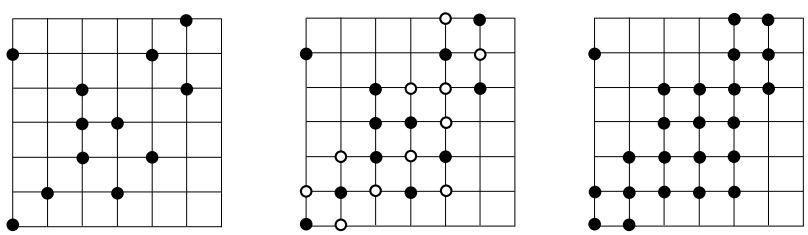
Czy stałą e da się zastąpić większą liczbą?

Zadanie 2. (**K**) Niech $A, B, C \subseteq \mathbb{Z}$ będą zbiorami skończonymi. Definiujemy $A \pm B = \{a \pm b : a \in A, b \in B\}$. Niech $|\cdot|$ oznacza liczbę elementów zbioru.

(i) Udowodnij nierówność $|B| \cdot |A - C| \leq |A - B| \cdot |B - C|$.

(ii) Udowodnij nierówność $|A + B| \cdot |A| \cdot |B| \leq |A - B|^3$.

Zadanie 3. (**K**) Rozważmy kratę $n \times n$, której wierzchołki mogą znajdować się w jednym z dwóch stanów – każdy wierzchołek może być zdrowy lub zainfekowany. Załóżmy, że na początku mamy k zainfekowanych wierzchołków. W każdej rundzie nowe wierzchołki zostają zainfekowane zgodnie z następującą regułą: zainfekowany zostaje wierzchołek, który sąsiaduje z dwoma lub większą liczbą zainfekowanych wierzchołków. Wyznacz najmniejszą liczbę k o tej własności, że istnieje początkowe rozmieszczenie k zainfekowanych wierzchołków, które po skończenie wielu krokach prowadzi do zainfekowania całej kraty.



Rysunek 1: Krata 7×7. Na rysunku po lewej stronie przedstawiono zainfekowane wierzchołki po pewnej liczbie kroków. Na środkowym rysunku zaznaczono dodatkowo wierzchołki, które zostaną zainfekowane w kolejnym kroku. Trzeci rysunek przedstawia sytuację końcową, po wykonaniu tego kroku.

Zadanie 4. (**G+K**) Niech A będzie rzeczywistą macierzą $n \times n$. Udowodnij, że istnieje macierz diagonalna $D = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, gdzie $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 1\}$ taka, że $\det(A + D) \neq 0$.

Zadanie 5. (**A**) Niech P będzie rzeczywistym wielomianem stopnia większego niż 1. Udowodnij, że wielomian $P' + P^2$ ma przynajmniej jeden nierzeczywisty pierwiastek.

Zadanie 6. (**A+G**) Niech V będzie przestrzenią liniową nad $\mathbb{C}$ i niech $T : V \to V$ będzie przekształceniem liniowym. Ustalmy liczbę naturalną n i załóżmy, że dla wszystkich $v \in V$ wektory $v, Tv, T^2v, \ldots, T^nv$ są liniowo zależne. Czy wynika stąd, że przekształcenia $I, T, T^2, \ldots, T^n$ są liniowo zależne?

Liga zadaniowa

Seria VI, 2014/2015, Piotr Nayar, Marta Strzelecka

Pytania dotyczące zadań prosimy kierować do Piotra Nayara na adres: nayar@mimuw.edu.pl. Rozwiązania można przesyłać Marcie Strzeleckiej na adres martast@mimuw.edu.pl, przynosić do pokoju 4500 lub zostawiać w skrytce przy sekretariatach (w przegródce Marty Strzeleckiej).

Zadanie 1. (**A**) Niech f będzie dodatnią funkcją ciągłą spełniającą warunki

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Udowodnij nierówność

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ln\left(\frac{1}{f(x)}\right)\mathrm{d}x \;\le\; \frac{1}{2}\ln(2\pi e).$$

Zadanie 2. (**G**) Załóżmy, że U jest rzeczywistą macierzą ortogonalną $n \times n$. Przypuśćmy, że istnieje niezerowy wektor $x \in \mathbb{R}^n$ taki, że Ux jest prostopadły do x względem standardowego iloczynu skalarnego. Udowodnij, że każdy łuk okręgu jednostkowego S^1, który zawiera wszystkie wartości własne macierzy U, ma długość przynajmniej π.

Zadanie 3. (**A+K**) Kostką standardową w $\mathbb{R}^n$ nazwiemy zbiór postaci $(k_1, k_1+1)\times\ldots\times(k_n, k_n+1)$ dla $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$. Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie sumą m rozłącznych kostek standardowych. Definiujemy rzuty $P_i(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ dla $i = 1, \ldots, n$. Załóżmy, że dla $i = 1, \ldots, n$ zbiór $P_i(A)$ jest sumą m_i rozłącznych kostek standardowych w $\mathbb{R}^{n-1}$. Udowodnij nierówność $m_1 \cdot \ldots \cdot m_n \ge m^{n-1}$.

Zadanie 4. (**G+K**) Oznaczmy $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Dla $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ oraz $S \subseteq [n]$ definiujemy $w_S(x) = \prod_{i\in S} x_i$, przy czym $w_\emptyset \equiv 1$.

(i) Niech $f : \{-1, 1\}^n \to \mathbb{R}$. Udowodnij, że istnieją jednoznacznie wyznaczone liczby a_S, $S \subseteq [n]$ takie, że $f(x) = \sum_{S\subseteq[n]} a_S w_S(x)$ dla wszystkich $x \in \{-1, 1\}^n$.

(ii) Załóżmy, że funkcja $f(x) = \sum_{S\subseteq[n]} a_S w_S(x)$ spełnia $|f(x)| = 1$ dla wszystkich $x \in \{-1, 1\}^n$. Udowodnij, że $\sum_{S\subseteq[n]} a_S^2 = 1$.

Zadanie 5. (**K**) Niech G będzie grafem prostym o $n \ge 3$ wierzchołkach. Załóżmy, że każde dwa wierzchołki mają dokładnie jednego wspólnego sąsiada. Udowodnij, że n jest liczbą nieparzystą i w grafie G jeden z wierzchołków ma stopień $n - 1$.

Zadanie 6. (**A**) Niech $(a_n)_{n\ge0}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Załóżmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$ jest zbieżny dla każdego $x \in \mathbb{R}$. Załóżmy ponadto, że funkcja $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$ jest tożsamościowo równa 0. Czy z tego wynika, że $a_n = 0$ dla $n \ge 0$?

Liga zadaniowa

Seria VII, 2014/2015, Piotr Nayar, Marta Strzelecka

Pytania dotyczące zadań prosimy kierować do Piotra Nayara na adres: nayar@mimuw.edu.pl. Rozwiązania można przesyłać Marcie Strzeleckiej na adres martast@mimuw.edu.pl, przynosić do pokoju 4500 lub zostawiać w skrytce przy sekretariatach (w przegródce Marty Strzeleckiej).

Zadanie 1. (**G**) Niech $x_1, \ldots, x_n$ i $y_1, \ldots, y_n$ będą dwiema bazami przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^n$. Ustalmy liczbę naturalną $1 \leq k \leq n$. Udowodnij, że dla pewnych $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n$ zbiory

$$A = \{y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}, x_{k+1}, \ldots, x_n\}, \qquad B = (\{y_1, \ldots, y_n\} \setminus \{y_{i_1}, \ldots, y_{i_k}\}) \cup \{x_1, \ldots, x_k\}.$$

są ponownie dwiema bazami $\mathbb{R}^n$.

Zadanie 2. (**A**) Niech $(a_n)_{n\geq 1}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych o tej własności, że dla każdego $t \in \mathbb{R}$ istnieje granica $\lim_{n\to\infty} e^{ia_n t}$. Czy wynika stąd, że ciąg $(a_n)_{n\geq 1}$ ma granicę skończoną?

Zadanie 3. (**G+K**) Niech $A = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^2$. Załóżmy, że punkty $v_1, \ldots, v_n$ nie leżą na jednej prostej. Udowodnij, że przez pary punktów ze zbioru A da się przeprowadzić przynajmniej n różnych prostych.

Zadanie 4. (**A+K**) Powiemy, że punkty $u, v \in \{0,1\}^n$ są sąsiadami ($u \sim v$), jeśli u i v różnią się dokładnie na jednej współrzędnej.

(i) Niech $A \subseteq \{0,1\}^n$. Dla $v \in A$ definiujemy $d_A(v) = |\{u \in A : \ u \sim v\}|$. Udowodnij nierówność $|A| \geq 2^d$, gdzie $d = \frac{1}{|A|}\sum_{v\in A} d_A(v)$.

(ii) Dla $A \subseteq \{0,1\}^n$ definiujemy $E(A, A^c) = \{(u,v) : u \sim v, u \in A, v \in A^c\}$. Udowodnij nierówność $|E(A, A^c)| \geq |A|(n - \log_2 |A|)$.

Zadanie 5. (**A**) Niech $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi i niech $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p}$. Udowodnij, że dla $p \in [1,2]$ prawdziwa jest nierówność

$$\left\|\frac{f+g}{2}\right\|_p^2 + (p-1)\left\|\frac{f-g}{2}\right\|_p^2 \leq \frac{\|f\|_p^2 + \|g\|_p^2}{2}.$$

Zadanie 6. (**G+K**) Niech $A_1, \ldots, A_k$ będą podzbiorami zbioru $\{1, \ldots, n\}$, przy czym każdy z tych zbiorów ma parzystą liczbę elementów. Załóżmy, że dla dowolnych $1 \leq i < j \leq n$ zbiór $A_i \cap A_j$ ma nieparzystą liczbę elementów. Wykaż, że $k \leq n$.

Liga zadaniowa

Seria VIII, 2014/2015, Piotr Nayar, Marta Strzelecka

Pytania dotyczące zadań prosimy kierować do Piotra Nayara na adres: nayar@mimuw.edu.pl. Rozwiązania można przesyłać Marcie Strzeleckiej na adres martast@mimuw.edu.pl, przynosić do pokoju 4500 lub zostawiać w skrytce przy sekretariatach (w przegródce Marty Strzeleckiej).

Zadanie 1. (**K**) Niech P_n będzie wielokątem foremnym o n wierzchołkach. Triangulacją wielokąta P_n nazwiemy dowolny podział tego wielokąta na trójkąty (o parami niepustych wnętrzach), których wierzchołki są wierzchołkami P_n. Powiemy, że przekątna p wielokąta P_n jest elementem triangulacji T jeśli w T istnieje trójkąt, którego jeden z boków jest równy p. Powiemy, że pewien podzbiór $\mathcal{F}$ zbioru wszystkich triangulacji jest dobry, jeśli dla każdej pary triangulacji $T_1, T_2 \in \mathcal{F}$ istnieje przekątna p wielokąta K_n będąca elementem T_1 i T_2. Udowodnij, że maksymalna możliwa moc dobrego zbioru triangulacji jest równa C_{n-3}, gdzie C_n jest n-tą liczbą Catalana.

Uwaga. Wszystkich triangulacji P_n jest C_{n-2}.

Zadanie 2. (**A**) Dla $f, g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ definiujemy splot $(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$. Załóżmy, że f spełnia $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, $\int_{\mathbb{R}} xf(x)\,\mathrm{d}x = 0$ oraz $\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Niech $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Udowodnij nierówność

$$\int_{\mathbb{R}} (f \star \varphi) \ln(f \star \varphi) \leq \int_{\mathbb{R}} (f \star f) \ln(f \star f).$$

Zadanie 3. (**A+G+K**) Oznaczmy $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Dla $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ oraz $S \subseteq [n]$ definiujemy $w_S(x) = \prod_{i \in S} x_i$, przy czym $w_\emptyset \equiv 1$. Niech $f : \{-1, 1\}^n \to \{-1, 1\}$ będzie postaci $f = \sum_{S \subseteq [n]} a_S w_S$ (patrz Zadanie 4 z Serii 6). Udowodnij nierówność

$$-\sum_S a_S^2 \ln\left(a_S^2\right) \leq C \sum_S a_S^2 |S|,$$

gdzie $|S|$ jest mocą zbioru $S \subseteq [n]$ i $C > 0$ jest pewną stałą uniwersalną (niezależną od n, np. $C = 2015$ powinno wystarczyć).

Zadanie 4. (**G**) Niech K będzie zbiorem wypukłym w $\mathbb{R}^n$. Załóżmy, że n-wymiarowa objętość zbioru K jest równa 1. Udowodnij, że istnieje hiperpłaszczyzna H o tej własności, że zbiór $K \cap H$ ma $(n-1)$-wymiarową objętość nie mniejszą niż c, gdzie $c > 0$ jest pewną stałą uniwersalną.

Uwaga. Jeśli pojęcie n-wymiarowej objętości budzi strach i zwątpienie, to można sobie założyć, że K jest skończoną sumą sympleksów. Objętość n-wymiarowego sympleksu liczymy tak, jak na GALu.

Zadanie 5. (**A**) Niech $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją postaci $f(x) = \sum_{k=1}^{d} a_k \sin(kx)$. Niech $x_1, \ldots, x_m \in [-\pi, \pi]$ będą wszystkimi miejscami zerowymi funkcji f'. Udowodnij, że dla pewnej stałej uniwersalnej $C > 0$ prawdziwa jest nierówność

$$\sum_{j=1}^{m} |f(x_j)| \leq Cd \int_{-\pi}^{+\pi} |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Zadanie 6. (**G+K**) Niech m, n będą liczbami naturalnymi i niech A będzie macierzą $m \times n$, której kolumny są wektorami w $\mathbb{R}^m$ o długości euklidesowej 1. Udowodnij, że istnieje wektor $x \in \{-1, 1\}^n$ o tej własności, że $Ax \in [-C, C]^m$, gdzie $C > 0$ jest stałą uniwersalną.