Analiza Matematyczna I.1

Seria 1, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1. Niech $a_k > -1$, $(k = 1, \ldots, n)$ będą liczbami rzeczywistymi o tym samym znaku. Udowodnij, że prawdziwa jest nierówność

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Czy założenie, że liczby a_k mają ten sam znak i $a_k > -1$ jest potrzebne?

Zadanie 2. (a) Dla $n \geq 1$ udowodnij tożsamość $(1 + 2 + \ldots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$.

(b) Oblicz sumę $1^4 + 2^4 + \ldots + n^4$.

Zadanie 3 (Nierówność Schwarza)**.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Kiedy w tej nierówności mamy równość?

Zadanie 4 (Nierówność między średnimi)**.** Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Udowodnij nierówności

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Zadanie 5. Niech $(F_n)_{n \geq 0}$ będzie ciągiem Fibonacciego, $F_0 = 0, F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \geq 0$. Udowodnij tożsamości

(a) $F_m F_{n+1} - F_{m+1} F_n = (-1)^n F_{m-n}, \quad m \geq n \geq 0,$

(b) $F_n^2 - F_{n+r} F_{n-r} = (-1)^{n-r} F_r^2, \quad n \geq r \geq 0,$

(c) $F_n^2 - F_{n+1} F_{n-1} = (-1)^{n+1}, \quad n \geq 1,$

(d) $F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1},$

(e) $F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1, \quad n \geq 1,$

(f) $F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}, \quad n \geq 1,$

(g) $F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2, \quad n \geq 0,$

(h) $F_m F_n + F_{m-1} F_{n-1} = F_{m+n-1}, \quad m, n \geq 1,$

(i) $F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2, \quad n \geq 1,$

(j) $F_{n+1} F_m + F_n F_{m-1} = F_{m+n}, \quad m \geq 1, n \geq 0.$

Zadanie 6. Ustalmy liczby dodatnie $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Niech $a_n = x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n$.

a) Udowodnij, że ciąg $(a_n)_{n \geq 0}$ jest log-wypukły, tzn. $a_i^2 \leq a_{i-1} a_{i+1}$.

b) Udowodnij, że jeśli ciąg $(b_n)_{n \geq 0}$ jest log-wypukły i $b_0 = 1$, to ciąg $(\sqrt[n]{b_n})_{n \geq 1}$ jest rosnący.

c) Udowodnij, że ciąg $(\sqrt[n]{\frac{a_n}{k}})_{n \geq 1}$ jest rosnący, czyli

$$\sqrt[p]{\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_k^p}{k}} \leq \sqrt[q]{\frac{x_1^q + x_2^q + \ldots + x_k^q}{k}}$$

dla $0 < p \leq q$, $p, q \in \mathbb{N}$.

Analiza Matematyczna I.1

Seria 2, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1 (Wzór Bineta)**.** Niech $(F_n)_{n\geq 0}$ będzie ciągiem Fibonacciego, $F_0 = 0, F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \geq 0$. Udowodnij wzór

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

Zadanie 2. Niech $c_0, c_1, \ldots, c_k$ będą liczbami zespolonymi. Załóżmy, że $c_0, c_k \neq 0$. Rozważmy równanie rekurencyjne $\sum_{i=0}^{k} c_i a_{n+i} = 0$, $n \geq 0$ $(\star)$. Niech $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ będą pierwiastkami wielomianu

$$W(z) = c_k z^k + c_{k-1} z^{k-1} + \ldots + c_1 z + c_0$$

z krotnościami $l_1, \ldots, l_p$, czyli

$$W(z) = c_k (z-\lambda_1)^{l_1} (z-\lambda_2)^{l_2} \cdot \ldots \cdot (z-\lambda_p)^{l_p}.$$

Niech $P_1, \ldots, P_l$ będą dowolnymi wielomianami o stopniach $l_1 - 1, l_2 - 1, \ldots l_p - 1$. Udowodnij, że ciąg

$$a_n = P_1(n)\lambda_1^n + P_2(n)\lambda_2^n + \ldots + P_l(n)\lambda_l^n$$

spełnia równanie $(\star)$.

Zadanie 3. Znajdź kresy zbiorów

$$\mathrm{A} = \left\{\tfrac{nm}{2n^2+m^2} \;\middle|\; n, m \neq 0,\ n, m \in \mathbb{Z}\right\}, \qquad \mathrm{B} = \left\{\tfrac{n^2 m}{n^2+m^2+n^4 m} \;\middle|\; n, m > 0,\ n, m \in \mathbb{N}\right\},$$
$$\mathrm{C} = \left\{\sqrt[k]{n} - [\sqrt[k]{n}] \;\middle|\; n > 0,\ n \in \mathbb{N}\right\}, \quad k > 0, k \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{D} = \left\{\sqrt[n]{n} \;\middle|\; n > 0,\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Zadanie 4. Niech T_1 będzie zbiorem trójkątów o obwodzie 1 na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Niech R_t, r_t będą odpowiednio promieniem okręgu opisanego na trójkącie t i promieniem okręgu wpisanego w trójkąt t. Wyznacz kresy zbiorów

$$A = \{\text{pole trójkąta } t \mid t \in T_1\}, \quad B = \{r_t \mid t \in T_1\}, \quad C = \{r_t \cdot R_t \mid t \in T_1\}.$$

Zadanie 5. Niech $n > 1, n \in \mathbb{N}$. Wyznacz kresy zbioru

$$A_n = \left\{\sum_{1\leq i<j\leq n} a_i a_j \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} a_i = 1,\ a_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\right\}.$$

Zadanie 6. Wyznacz kresy zbioru

$$A_n = \left\{\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \;\middle|\; a_1, \ldots, a_n > 0\right\}.$$

Analiza Matematyczna I.1

Seria 3, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1. Niech x będzie liczbą rzeczywistą. Definiujemy ciąg liczb $x_1, x_2, \ldots$ rekurencyjnie wzorem

$$x_0 = x, \quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n - [x_n]} \quad \text{gdy } x_n \notin \mathbb{Z}, n \geq 0.$$

Jeśli dla pewnego $n \geq 0$ mamy $x_n \in \mathbb{Z}$, to rozważamy jedynie skończony ciąg $x_1, \ldots, x_n$. Udowodnij, że x jest liczbą wymierną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje n, dla którego $x_n \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 2. Niech a_0 będzie dowolną liczbą rzeczywistą i niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Niech

$$R_n = R_n[a_0, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}.$$

Definiujemy rekurencyjnie ciągi $(p_k)_{k=0}^n$ i $(q_k)_{k=0}^n$ wzorami

$$\begin{array}{ll} p_0 = a_0 & q_0 = 1 \\ p_1 = a_0 a_1 + 1 & q_1 = a_1 \\ p_k = p_{k-1} a_k + p_{k-2} & q_k = q_{k-1} a_k + q_{k-2}, \quad k = 2, \ldots, n. \end{array}$$

Udowodnij, że

a) $R_k[a_0, \ldots, a_k] = \frac{p_k}{q_k}, \quad k = 0, \ldots, n,$

b) $p_{k-1} q_k - q_{k-1} p_k = (-1)^k, \quad k = 1, \ldots, n,$

c) $R_{k+1} - R_k = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k+1}}, \quad k = 0, \ldots, n-1.$

Wywnioskuj, że jeśli liczby p_k i q_k są całkowite, to są względnie pierwsze.

Zadanie 3. Niech x będzie liczbą niewymierną. Definiujemy ciąg liczb $x_0, x_1, \ldots$ rekurencyjnie wzorem

$$x_0 = x, \quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n - [x_n]}, \qquad n \geq 0.$$

Niech ponadto $a_n = [x_n]$ dla $n \geq 0$ i niech $R_n = R_n[a_0, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$ (patrz Zadanie 2). Udowodnij, że

$$x - R_n = \frac{(-1)^n}{(q_n x_{n+1} + q_{n-1}) q_n}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

oraz

$$|x - R_{n+1}| < |x - R_n|, \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

Wywnioskuj stąd, że

$$R_0 < R_2 < R_4 < \ldots \quad x \quad \ldots < R_5 < R_3 < R_1.$$

Zadanie 4. Niech x będzie liczbą niewymierną i niech liczby $R_n = \frac{p_n}{q_n}$ będą zdefiniowane tak, jak w Zadaniu 3. Przypuśćmy, że liczby $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 1$ spełniają nierówność $|x - \frac{p}{q}| < |x - \frac{p_n}{q_n}|$. Udowodnij, że $q > q_n$.

Analiza Matematyczna I.1

Seria 4, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1. Niech $a, b > 0$. Określamy ciągi $(a_n)_{n\geq 0}$ i $(b_n)_{n\geq 0}$ rekurencyjnie, $a_0 = a$, $b_0 = b$, $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. Udowodnij, że ciągi te są zbieżne do tej samej granicy (nazywanej średnią arytmetyczno-geometryczną liczb a, b).

Zadanie 2. Niech $a \in \mathbb{R}$. Zbadaj zbieżność ciągu $a_0 = a$, $a_{n+1} = 2a_n(1 - a_n)$, $n \geq 0$.

Zadanie 3. Niech $a \in \mathbb{R}$. Zbadaj zbieżność ciągu $a_0 = a$, $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$, $n \geq 0$.

Zadanie 4. Udowodnij, że dla $n \geq 2$ prawdziwa jest nierówność $\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)^n \geq n$ i wywnioskuj, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Zadanie 5. Niech $(a_n)_{n\geq 0}$ będzie ciągiem liczb dodatnich. Udowodnij, że jeśli $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, to również $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$. Czy ze zbieżności ciągu $(\sqrt[n]{a_n})$ wynika zbieżność ciągu $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$?

Zadanie 6. Oblicz granice

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$, b) $\lim_{n\to\infty} n^{1-\frac{1}{k}}(\sqrt[k]{n+1} - \sqrt[k]{n})$, $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$,

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}$, $k \in \mathbb{N}, k \geq 0$, d) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n}$,

e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_k^n} = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $a_1, \ldots, a_k > 0$.

Zadanie 7. Niech $(a_n)_{n\geq 0}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych o wyrazach niezerowych i niech $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$. Udowodnij, że $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.

Zadanie 8. Definiujemy ciągi $(a_n)_{n\geq 1}$ i $(b_n)_{n\geq 1}$ wzorami $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Udowodnij, że ciąg (a_n) jest rosnący, a ciąg (b_n) malejący. Wywnioskuj stąd, że ciągi te są zbieżne do tej samej granicy (oznaczanej e).

Zadanie 9. Ciąg liczb $(a_n)_{n\geq 0}$ spełnia nierówność $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ (takie ciągi nazywamy ciągami podaddytywnymi). Udowodnij, że istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \in [-\infty, 0)$.

Zadanie 10. Niech $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{kn}$, $n \geq 1$

Zadanie 11. Zbadaj zbieżność ciągu $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$, $n \geq 1$.

Zadanie 12. Niech $f : [0, 1] \to [0, 1]$ będzie funkcją niemalejącą i niech $a_0 \in [0, 1]$. Definiujemy ciąg $(a_n)_{n\geq 0}$ rekurencyjnie, $a_{n+1} = f(a_n)$. Udowodnij, że ciąg $(a_n)_{n\geq 0}$ jest zbieżny.

Zadanie 13. Niech $(a_n)_{n\geq 1}$ będzie ograniczonym ciągiem liczb rzeczywistych. Przypuśćmy, że $a_{n+1} - a_n > -\frac{1}{n^2}$ dla $n \geq 1$. Udowodnij, że ciąg (a_n) jest zbieżny.

Zadanie 14. Oblicz granicę ciągu $a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$.

Zadanie 15. Oblicz granicę ciągu $a_n = n\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+n)^2}\right)$.

Zadanie 16. Zbadaj zbieżność ciągu $a_n = \sin^2(\pi\sqrt{n^2 + n})$.

Zadanie 17. Niech $a > 0$. Oblicz $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1)$.

Zadanie 18. Niech $a, b > 0$. Udowodnij, że $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \sqrt{ab}$.

Zadanie 19. Niech $k \geq 2$. Oblicz $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{nk}{n}}$.

Zadanie 20. Dla $a_0 \in [0, 1]$ zbadaj zbieżność ciągu zadanego rekurencyjnie $a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n)$, $n \geq 0$.

Analiza Matematyczna I.1

Seria 9, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1. Udowodnij, że dla dowolnej liczby rzeczywistej a i liczby naturalnej n prawdziwa jest nierówność

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin ka}{k}\right| < 3\sqrt{\pi}.$$

Zadanie 2. Niech $(a_n)_{n\geq 1}$ będzie ciągiem liczb dodatnich. Udowodnij, że jeśli $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) \geq c > 0$ dla $n \geq n_0$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ jest zbieżny.

Zadanie 3. Niech $p \in \mathbb{R}$. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n!e^n}{n^{n+p}}$.

Zadanie 4. Niech $a \in \mathbb{R}$. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)\sin(n^2a)}{n}$.

Zadanie 5. Niech $(a_n)_{n\geq 1}$ będzie ciągiem liczb dodatnich monotonicznie zbieżnym do 0. Czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(n+\frac{1}{n}\right)$ musi być zbieżny?

Zadanie 6. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$.

Zadanie 7. Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$.

Zadanie 8. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Czy wynika stąd zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$? Czy wynika stąd zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$?

Zadanie 9. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach różnych od 0 jest zbieżny. Czy wynika stąd zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{\sin a_n}{n}\right)$?

Zadanie 10. Przypuśćmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny i ciąg liczb dodatnich $(b_n)_{n\geq 1}$ jest niemalejący, a ponadto $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Udowodnij, że szereg $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k}$ jest zbieżny i

$$b_n\left(\sum_{k=n}^{\infty}\frac{a_k}{b_k}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0, \qquad \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Zadanie 11. Niech $(a_n)_{n\geq 1}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Przypuśćmy, że dla pewnego $x_0 \in \mathbb{R}$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{x_0}}$ jest zbieżny. Udowodnij, że dla każdego $x > x_0$ zbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$.

Zadanie 12. Znajdź iloczyn Cauchy'ego szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ z samym sobą dla $|x| < 1$.

Zadanie 13. Udowodnij, że iloczyn Cauchy'ego szeregów o wyrazach dodatnich jest rozbieżny jeśli któryś z tych szeregów jest rozbieżny.

Zadanie 14. Niech $(a_n)_{n\geq 0}$ i $(b_n)_{n\geq 0}$ będą ciągami liczb rzeczywistych. Załóżmy, że szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ są zbieżne ich sumy są równe A i B, odpowiednio. Niech $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0$. Załóżmy, że $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ jest zbieżny do C. Udowodnij, że $C = AB$.

Zadanie 15. Podaj przykład dwóch szeregów zbieżnych, których iloczyn Cauchy'ego jest szeregiem rozbieżnym. Podaj przykład dwóch szeregów rozbieżnych, których iloczyn Cauchy'ego jest szeregiem zbieżnym.

Analiza Matematyczna I.1

Zadania domowe, seria 1, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1 (1 pkt)**.** Udowodnij, że dla $x > -1$ i $k \in \mathbb{Z}$ prawdziwa jest nierówność

$$(1+x)^k \geq 1 + kx.$$

Udowodnij również, że dla $-1 < x < \frac{1}{n}$ i $n \in \mathbb{N}$ prawdziwe jest oszacowanie

$$(1+x)^n \leq \frac{1}{1-nx}\ .$$

Zadanie 2 (1 pkt)**.** Udowodnij, że jeśli ciągi $a_1, a_2, \ldots a_n$ i $b_1, b_2, \ldots, b_n$ są niemalejące lub nierosnące, to

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \leq n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k\ .$$

Co można powiedzieć, jeśli jeden z tych ciągów jest nierosnący, a drugi niemalejący?

Zadanie 3 (2 pkt)**.** Udowodnij, że dla $0 < \alpha \leq \beta$ prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt[\beta]{x_1^\beta + x_2^\beta + \ldots + x_k^\beta} \leq \sqrt[\alpha]{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_k^\alpha}.$$

Zadanie 4 (1 pkt)**.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb zespolonych $z_1, \ldots, z_n$ prawdziwa jest nierówność

$$|z_1 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + \ldots + |z_n|.$$

Zadanie 5 (3 pkt)**.** Niech $(F_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ będzie dwustronnym ciągiem wyznaczonym przez warunki $F_0 = 0, F_1 = 1,\ F_{k+2} = F_{k+1} + F_k,\ k \in \mathbb{Z}$.

(a) Udowodnij tożsamość

$$F_{nm+k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} F_{k-i} F_m^i F_{m+1}^{n-i}, \qquad n, m \geq 1, k \in \mathbb{Z}.$$

(b) Udowodnij, że $5^k \big| F_{5^k}$ dla $k \geq 1$.

Analiza Matematyczna I.1

Zadania domowe, seria 1, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1 (2 pkt)**.** Niech $f : [0,1] \to [0,1]$ będzie funkcją rosnącą. Rozstrzygnij, czy musi istnieć $x \in [0,1]$ o tej własności, że $f(x) = x$.

Zadanie 2 (2 pkt)**.** • Niech $n \geq 2$. Wyznacz kresy zbioru

$$A_n = \left\{ \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n}{a_n + a_1} \mid a_1, \ldots, a_n > 0 \right\}.$$

Czy kresy należą do zbioru A_n?

Zadanie 3 (1 pkt)**.** Niech $n \geq 3$. Wśród n-kątów wpisanych w okrąg o promieniu 1 znajdź te o największym polu powierzchni.

Zadanie 4 (2 pkt)**.** Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają równość warunek $a^3+b^3+c^3 = 0$. Udowodnij nierówność

$$\left((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right)\left(a^4 + b^4 + c^4\right) \geq \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^3.$$

Zadanie 5 (1 pkt)**.** Wyznacz kresy zbioru

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} \;\middle|\; n, m \geq 1, n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Analiza Matematyczna I.1

Zadania domowe, seria 3, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1 (1 pkt)**.** Dla jakich liczb $\alpha \in \mathbb{R}$ ciąg $(\{n\alpha\})_{n\geq 1}$ jest gęsty w odcinku $[0,1]$?

Zadanie 2 (1 pkt)**.** Niech n będzie nieujemną liczbą całkowitą. Rozważmy funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$f(x) = |x| + |x-1| + \ldots + |x-n|.$$

Wyznacz minimum funkcji f.

Zadanie 3 (2 pkt)**.** Niech $k \geq 1$ i niech $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ będzie ciągiem nieujemnych liczb całkowitych. Przypuśćmy, że liczba rzeczywista $x \neq 0$ spełnia

$$x^{n_0} + x^{n_1} + x^{n_2} + \ldots + x^{n_k} = 0.$$

Udowodnij, że $|x| \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Zadanie 4 (3 pkt)**.** Niech $(a_n)_{n\geq 1}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Rozstrzygnij, które z następujących własności są równoważne.

(W1) Ciąg $(a_n)_{n\geq 1}$ jest ograniczony.

(W2) Dla wszystkich $\lambda > 1$ ciąg $(a_{\lfloor 2^{\lambda^n} \rfloor})_{n\geq 1}$ jest ograniczony.

(W3) Dla wszystkich $\lambda > 1$ ciąg $(a_{\lfloor \lambda^{2^n} \rfloor})_{n\geq 1}$ jest ograniczony.

Zadanie 5 (1 pkt)**.** Niech $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ i niech $\lambda_i \geq 0$ spełniają warunek $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Udowodnij, że

$$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^{-1}\right) \leq \frac{(x_1+x_n)^2}{4x_1x_n}.$$

Analiza Matematyczna I.1

Zadania domowe, seria 4, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1 (pisemne, 1 pkt)**.** Niech $c \geq 0$. Zbadaj zbieżność ciągu $(a_n)_{n\geq 0}$,

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \sqrt{c}, \quad a_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}}, \quad a_2 = \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c}}}, \quad \ldots$$

Zadanie 2 (1 pkt)**.** Niech $a, b, c > 0$. Zbadaj zbieżność ciągów $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ i $(c_n)_{n\geq 0}$ określonych rekurencyjnie, $a_0 = a, b_0 = b, c_0 = c$,

$$a_{n+1} = \frac{3}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} + \frac{1}{c_n}}, \quad b_{n+1} = \sqrt[3]{a_n b_n c_n}, \quad c_{n+1} = \frac{a_n + b_n + c_n}{3}, \quad n \geq 0.$$

Zadanie 3 (2 pkt)**.** Niech $k \geq 1$ i niech $(a_n^{(1)})_{n\geq 0}$, $(a_n^{(2)})_{n\geq 0}$, $\ldots$ $(a_n^{(k)})_{n\geq 0}$ będą ciągami niezerowych liczb rzeczywistych. Udowodnij, że istnieje liczba naturalna $1 \leq i \leq k$ i podciąg $(n_l)_{l\geq 0}$ liczb naturalnych o tej własności, że ciągi

$$\left(a_{n_l}^{(i)}/a_{n_l}^{(1)}\right)_{l\geq 0}, \quad \left(a_{n_l}^{(i)}/a_{n_l}^{(2)}\right)_{l\geq 0}, \quad \ldots \quad \left(a_{n_l}^{(i)}/a_{n_l}^{(k)}\right)_{l\geq 0}$$

są zbieżne.

Zadanie 4 (3 pkt)**.** Zbadaj zbieżność ciągu zadanego rekurencyjnie,

$$a_1 = a_2 = 1, \qquad a_{n+2} = \frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_n}, \quad n \geq 1.$$

Zadanie 5 (1 pkt)**.** Udowodnij (elementarnie, bez wzoru Stirlinga!) nierówność

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Analiza Matematyczna I.1

Zadania domowe, seria 5, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1 (pisemne, 2 pkt)**.** Niech $a, b > 0$. Oblicz granice

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^a}{b^n}$ (b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^a}{n^b}$ (c) $\lim_{n\to\infty} a^n n^{bn}$

(d) $\lim_{n\to\infty} e^{-(\ln n)^a} n^b$ (e) $\lim_{n\to\infty} e^{n^a} n^{-b}$ (f) $\lim_{n\to\infty} b^n (\ln n)^{a \ln n}$

Uwaga: Odpowiedź może zależeć od wyboru parametrów a, b.

Zadanie 2 (2 pkt)**.** Niech $k \in \mathbb{N}, k \geq 0$. Definiujemy ciąg rekurencyjnie

$$x_0 > 0, \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^k}.$$

Zbadaj istnienie granicy $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt[k+1]{n}}$.

Zadanie 3 (2 pkt)**.** Niech $(a_n)_{n\geq 0}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych spełniającym

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} (a_{2n} - 2a_n) = 0.$$

Czy z tego wynika, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$?

Zadanie 4 (1 pkt)**.** Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1} \right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Zadanie 5 (1 pkt)**.** Niech $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ będą ciągami liczb rzeczywistych dodatnich. Przypuśćmy, że $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ i $\lim_{n\to\infty} b_n = B$. Oblicz granicę ciągu

$$c_n = \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1}{n}.$$

Analiza Matematyczna I.1

Zadania domowe, seria 6, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1 (1 pkt)**.** Niech $a_0, a_1 > 0$. Zbadaj zbieżność ciągu zadanego rekurencyjnie,

$$a_{n+1} = \frac{2}{a_n + a_{n-1}}, \qquad n \geq 1.$$

Zadanie 2 (2 pkt)**.** Niech $n \geq 3$ i niech $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$. Udowodnij nierówność

$$\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_2 a_3} + \ldots + \sqrt{a_n a_1} \geq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3} + \sqrt[3]{a_2 a_3 a_4} + \ldots + \sqrt[3]{a_n a_1 a_2}.$$

Zadanie 3 (1 pkt)**.** Ciąg $(x_n)_{n\geq 1}$ zdefiniowany jest poprzez równości

$$x_1 = 3, \quad 2^{x_2} = 3^3, \quad 2^{2^{x_3}} = 3^{3^3}, \quad 2^{2^{2^{x_3}}} = 3^{3^{3^3}}, \quad \ldots$$

Czy ciąg $(x_n)_{n\geq 1}$ jest zbieżny?

Zadanie 4 (2 pkt)**.** Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

Zadanie 5 (2 pkt)**.** Rozważmy ciąg $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \sin(a_n)$, $n \geq 0$. Czy istnieje liczba $\alpha > 0$, dla której granica $\lim_{n\to\infty} n^\alpha a_n$ jest dodatnia i skończona?

Zadanie 6 (pisemne, 0 pkt)**.** Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ prawdziwa jest nierówność[1]

$$\frac{e}{2n+2} < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{2n+1}.$$

Oblicz również granicę

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{e} \right)^n.$$

[1] Mogą być przydatne następujące oszacowania logarytmu,

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \leq \ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}, \quad x \geq 0.$$

Udowodnimy je na ćwiczeniach metodami rachunku różniczkowego.

Analiza Matematyczna I.1

Zadania domowe, seria 7, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1 (1 pkt)**.** Rozważmy ciągi liczb nieujemnych $(a_n)_{n\geq 1}$ i $(b_n)_{n\geq 1}$.

(a) Czy ze zbieżności szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}$?

(b) Czy z rozbieżności szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ wynika rozbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \min\{a_n, b_n\}$?

Zadanie 2 (2 pkt)**.**

a) Czy dla każdej bijekcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nf(n)}$ jest zbieżny?

b) Czy dla każdej bijekcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+f(n)}$ jest rozbieżny?

Zadanie 3 (1 pkt)**.** Niech $(a_n)_{n\geq 1}$ będzie ciągiem o wyrazach dodatnich. Czy ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} n^{12} a_n^4$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$?

Zadanie 4 (pisemne, 1 pkt)**.** Niech $\alpha > 0$. Zbadaj zbieżność szeregów

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{\ln n} - 1)^{\alpha}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})^{\alpha}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}$,

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n (\sqrt[n]{1+\alpha} - 1)^n$, (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}\right)^{\alpha}$, (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n^{\alpha}} + n^{\alpha^3} - 2}$.

Zadanie 5 (1 pkt)**.** Czy istnieje ciąg $(a_n)_{n\geq 1}$ liczb dodatnich o tej własności, że $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, ale dla dowolnego ciągu $(b_n)_{n\geq 1}$ liczb dodatnich, zbieżnego monotonicznie do 0, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.

Zadanie 6 (2 pkt)**.** Czy istnieje ciąg $(x_n)_{n\geq 1}$ liczb rzeczywistych dodatnich o tej własności, że dla wszystkich $0 < \alpha < \beta$ mamy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{1 \leq k \leq n : \ x_k > \beta\}|}{|\{1 \leq k \leq n : \ x_k > \alpha\}|} = 0 \quad ?$$

Analiza Matematyczna I.1

Zadania domowe, seria 7, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1 (♡, 0 pkt, pisemne)**.** Oblicz sumę szeregów

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} nq^n$, $|q| < 1$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$,
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2^n}\right)$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(2n)!!}$, (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{n^2}\right)$.

Zadanie 2 (1+2 pkt)**.** Udowodnij, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} |\sin n|^n$ jest rozbieżny. Czy ciąg $((\sin n)^n)_{n\geq 1}$ jest gęsty w $(0,1)$?

Zadanie 3 (1 pkt)**.** Udowodnij, że liczba $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$ nie jest liczbą algebraiczną.

Zadanie 4 (♡, 1 pkt)**.** Udowodnij, że dla $a/(2\pi) \notin \mathbb{Z}$ prawdziwe są wzory

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(ka) = \frac{\sin\left(\frac{na}{2}\right) \cos\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}, \qquad \sum_{k=1}^{n} \sin(ka) = \frac{\sin\left(\frac{na}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}.$$

W szczególności

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin(ka)\right| \leq \frac{1}{|\sin\left(\frac{a}{2}\right)|}, \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} \cos(ka)\right| \leq \frac{1}{|\sin\left(\frac{a}{2}\right)|}.$$

Zadanie 5 (2 pkt)**.** Oblicz sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)^3}{(2n+1)^4+4}\ .$$

Zadanie 6 (♡, 1 pkt)**.** Zbadaj zbieżność szeregów

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\ln n) \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$.

Analiza Matematyczna I.1

Zadania domowe, seria 9, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1 (♡, 1 pkt)**.** Dla $|x| < 1$ udowodnij równość

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}}.$$

Zadanie 2 (1 pkt)**.** Niech $(a_n)_{n\geq 0}$ będzie malejącym ciągiem zbieżnym do 0. Niech $S_n = \sum_{i=n}^{\infty}(-1)^{i-n}a_i$. Udowodnij, że szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} S_n^2$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n S_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ są jednocześnie zbieżne lub jednocześnie rozbieżne.

Zadanie 3 (2 pkt)**.** Niech $(a_n)_{n\geq 0}$ będzie ciągiem liczb dodatnich. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne,

(W1) $\liminf_{n\to\infty} na_n > 0$.

(W2) Dla każdego nierosnącego ciągu $(b_n)_{n\geq 0}$ jeśli $b_k \geq a_k$ dla nieskończenie wielu $k \geq 0$, to $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$.

Zadanie 4 (2 pkt)**.** Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[n\sqrt{2}]}}{n}.$$

Zadanie 5 (♡,2 pkt)**.** Zbadaj zbieżność iloczynu Cauchy'ego szeregów

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\beta}, \qquad \alpha, \beta > 0.$$

Analiza Matematyczna I.1

Zadania domowe, seria 10, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1 (2 pkt)**.** Przypuśćmy, że ciągi $(a_n^{(1)})_{n\geq 1}, \ldots, (a_n^{(k)})_{n\geq 1}$ są zbieżne odpowiednio do $a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}$. Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^{k-1}} \sum_{i_1+i_2+\ldots+i_k=n} a_{i_1}^{(1)} \cdot \ldots \cdot a_{i_k}^{(k)} \right).$$

Zadanie 2 (2 pkt)**.** Niech $(a_n)_{n\geq 1}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych dodatnich. Przypuśćmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny. Udowodnij, że zbieżny jest również szereg $\sum_{n=1} a_n^{\frac{n-1}{n}}$.

Zadanie 3 (2 pkt)**.** Dla $n \geq 1$ udowodnij nierówności

$$\frac{1}{4(n+1)} < \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(-1)^{i-n}}{2i+1} < \frac{1}{4n}.$$

Zadanie 4 (pisemne, 1 pkt)**.** Wyznacz zbiór wartości funkcji $f, g, h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zadanych wzorami $f(z) = \sin z$, $g(z) = \cos z$, $h(z) = \mathrm{tg} z$.

Zadanie 5 (1 pkt)**.** Niech $\alpha, \beta \geq 1$ spełniają warunek $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Rozważmy zbiory

$$A = \{[n\alpha],\ n \geq 1\}, \qquad B = \{[n\beta],\ n \geq 1\}.$$

Udowodnij, że zbiory A i B są rozłączne i $A \cup B = \mathbb{N}$. Czy to zadanie ma coś wspólnego z Zadaniem 4 (Seria 9)?

Analiza Matematyczna I.1

Zadania domowe, seria 11, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1 (3 pkt)**.** Niech $(a_n)_{n\geq 1}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Udowodnij nierówność

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{a_1+\ldots+a_n}{n}\right|^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^p.$$

Czy stała $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ jest optymalna?

Zadanie 2 (2 pkt)**.** Niech $(a_n)_{n\geq 1}$ będzie ciągiem liczb dodatnich i niech $k \geq 1$. Udowodnij nierówność

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_{n+k}}{x_n}\right) \geq \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}.$$

Zadanie 3 (3 pkt)**.** Przypuśćmy, że szereg liczb zespolonych $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ jest zbieżny. Definiujemy zbiór $A \subset \mathbb{C}$,

$$A = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists\, f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N},\ z = \sum_{n=1}^{\infty} z_{f(n)}\}.$$

Udowodnij, że $A = \mathbb{C}$ lub istnieją liczby $a, b \in \mathbb{C}$ takie, że $A = \{a + tb \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Zadanie 4 (2 pkt)**.** Niech $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą wielomianami i $Q(n) \neq 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Przypuśćmy, że $\deg(P) < \deg(Q)$. Udowodnij, że szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{P(n)}{Q(n)}$$

jest zbieżny.

Zadanie 5 (2 pkt)**.** Niech $\lambda \in (0,1)$. Przypuśćmy, że funkcja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ spełnia nierówność

$$|f(u) - f(v)| \leq \lambda |u - v|.$$

Udowodnij, że dla dowolnego $a \in \mathbb{C}$ równanie $z = f(z) + a$ posiada jednoznaczne rozwiązanie.

Uwaga. Jedno zadanie należy wybrać i oddać jako pisemne.

Analiza Matematyczna I.1

Zadania domowe, seria 12, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1 (2 pkt)**.** Dla jakich $c > 0$ ciąg

$$c, \quad c^c, \quad c^{c^c}, \quad c^{c^{c^c}}, \quad \ldots$$

jest zbieżny do granicy skończonej?

Zadanie 2 (2 pkt)**.** Niech $n > 2$. Znajdź najmniejszą liczbę c_n o następującej własności: dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ istnieją $1 \leq i, j \leq n$ takie, że $i \neq j$, $a_i a_j \neq -1$ oraz

$$0 < \frac{a_i - a_j}{1 + a_i a_j} \leq c_n.$$

Zadanie 3 (3 pkt)**.** Powiemy, że bijekcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest *dobra*, jeśli posiada następujące własności,

(a) Dla dowolnego ciągu liczb rzeczywistych $(a_n)_{n\geq 1}$, jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to zbieżny jest również szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_{f(n)}$.

(b) Istnieje ciąg liczb rzeczywistych $(b_n)_{n\geq 1}$ taki, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny, ale szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_{f(n)}$ jest zbieżny.

Czy istnieje *dobra* bijekcja?

Zadanie 4 (2 pkt)**.**

- Dla $x \in (0, \pi)$ udowodnij tożsamość $\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} + \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi + x}{2}}\right)$.
- Udowodnij tożsamość $1 = \frac{2}{4^n} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}}$.
- Dla $x \in (0, \pi/2)$ udowodnij nierówności $\frac{1}{\sin^2 x} \geq \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{\sin^2 x} - 1$.
- Wywnioskuj nierówność $1 > \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{(2k+1)^2} > 1 - \frac{1}{2^n}$.
- Udowodnij równości $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Zadanie 5 (2 pkt)**.** Niech O będzie punktem wewnętrznym trójkąta ABC i niech P, Q, R będą rzutami punktu O na proste AB, BC i CA. Udowodnij nierówność

$$|OA| + |OB| + |OC| \geq 2(|OP| + |OQ| + |OR|).$$

Uwaga. Jedno zadanie należy wybrać i oddać jako pisemne.

Analiza Matematyczna I.1

Zadania domowe, seria 13, P. Nayar, 2012/13

Zadanie 1 (♡, 3 pkt)**.**

(a) Udowodnij, że istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że dla każdego $p \in \mathbb{R}$ mamy $\lim_{x\to p} f(x) = 0$, ale zbiór $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > 0\}$ jest gęsty w $\mathbb{R}$.

(b) Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Przypuśćmy, że dla każdego $p \in \mathbb{R}$ mamy $\lim_{x\to p} f(x) = 0$. Udowodnij, że istnieje liczba niewymierna a, dla której $f(a) = 0$.

Zadanie 2 (♡, 3 pkt)**.**

(a) Udowodnij, że zbiór punktów nieciągłości funkcji monotonicznej jest zbiorem przeliczalnym.

(b) Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie zbiorem przeliczalnym. Udowodnij, że istnieje niemalejąca funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że zbiór punktów nieciągłości f jest równy A.

Zadanie 3 (♡, 2 pkt)**.** Niech $C > 0$. Dla jakich $\alpha > 0$ z warunku

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

wynika, że f jest funkcją stałą?

Zadanie 4 (♡, 2 pkt)**.** Czy istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że dla każdego $p \in \mathbb{R}$ jest $\lim_{x\to p} f(x) = +\infty$?

Zadanie 5 (♡, 3 pkt)**.** Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją spełniającą równość $f(x+y) = f(x) + f(y)$ dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$.

(a) Przypuśćmy, że dla pewnego przedziału $I \subset \mathbb{R}$ i pewnej liczby rzeczywistej M mamy $f(x) \leq M$ dla $x \in I$. Wykaż, że istnieje liczba rzeczywista a taka, że $f(x) = ax$ dla $x \in \mathbb{R}$.

(b) Udowodnij, że istnieją rozwiązania powyższego równania funkcyjnego, które nie są funkcjami liniowymi. Załóżmy, że f jest takim rozwiązaniem. Udowodnij, że f ma wykres będący gęstym podzbiorem płaszczyzny $\mathbb{R}^2$.

Uwaga. Jedno zadanie należy wybrać i oddać jako pisemne.