Analiza Matematyczna I.1

Seria 1, P. Nayar, 2011/12

Zadanie 1. Niech $a_k > -1$, $(k = 1, \ldots, n)$ będą liczbami rzeczywistymi o tym samym znaku. Udowodnij, że prawdziwa jest nierówność

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdot \ldots \cdot (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Czy założenie, że liczby a_k mają ten sam znak i $a_k > -1$ jest potrzebne?

Zadanie 2. (Nierówność Bernoulliego) Udowodnij, że dla $x > -1$ i $k \in \mathbb{Z}$ prawdziwa jest nierówność

$$(1 + x)^k \geq 1 + kx.$$

Udowodnij również, że dla $-1 < x < \frac{1}{n}$ i $n \in \mathbb{N}$ prawdziwe jest oszacowanie

$$(1 + x)^n \leq \frac{1}{1 - nx}\ .$$

Zadanie 3. (Nierówność Schwarza) Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Kiedy w tej nierówności mamy równość?

Zadanie 4. (Nierówność między średnimi) Niech $a_1, a_n, \ldots, a_n$ będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Udowodnij nierówności

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}\ .$$

Zadanie 5. (Nierówność Czebyszewa) Udowodnij, że jeśli ciągi $a_1, a_2, \ldots a_n$ i $b_1, b_2, \ldots, b_n$ są niemalejące lub nierosnące, to

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \leq n \sum_{k=1}^{n} a_k b_k\ .$$

Co można powiedzieć, jeśli jeden z tych ciągów jest nierosnący, a drugi niemalejący?

Zadanie 6. Ustalmy liczby dodatnie $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Niech

$$a_n = x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n.$$

a) Udowodnij, że ciąg $(a_n)_{n\geq 0}$ jest log-wypukły, tzn. $a_i^2 \leq a_{i-1}a_{i+1}$.

b) Udowodnij, że jeśli ciąg $(b_n)_{n\geq 0}$ jest log-wypukły i $b_0 = 1$, to ciąg $(\sqrt[n]{b_n})_{n\geq 0}$ jest rosnący.

c) Udowodnij, że ciąg $(\sqrt[n]{\frac{a_n}{k}})_{n\geq 0}$ jest rosnący, czyli

$$\sqrt[p]{\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_k^p}{k}} \leq \sqrt[q]{\frac{x_1^q + x_2^q + \ldots + x_k^q}{k}}$$

dla $0 < p \leq q$, $p, q \in \mathbb{N}$.

d) Udowodnij, że dla $0 < \alpha \leq \beta$ prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt[\beta]{x_1^\beta + x_2^\beta + \ldots + x_k^\beta} \leq \sqrt[\alpha]{x_1^\alpha + x_2^\alpha + \ldots + x_k^\alpha}.$$

Zadanie 7. Udowodnij, że dla dowolnych liczb zespolonych $z_1, \ldots, z_n$ prawdziwa jest nierówność

$$|z_1 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + \ldots + |z_n|.$$

Analiza Matematyczna I.1

Seria 2, P. Nayar, 2011/12

Zadanie 1. Niech x będzie liczbą rzeczywistą. Definiujemy ciąg liczb $x_1, x_2, \ldots$ rekurencyjnie wzorem

$$x_0 = x, \quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n - [x_n]} \quad \text{gdy } \ x_n \notin \mathbb{Z}, n \geq 0.$$

Jeśli dla pewnego $n \geq 0$ mamy $x_n \in \mathbb{Z}$, to rozważamy jedynie skończony ciąg $x_1, \ldots, x_n$. Udowodnij, że x jest liczbą wymierną wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje n, dla którego $x_n \in \mathbb{Z}$.

Zadanie 2. Niech a_0 będzie dowolną liczbą rzeczywistą i niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Niech

$$R_n = R_n[a_0, \ldots, a_n] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}.$$

Definiujemy rekurencyjnie ciągi $(p_k)_{k=0}^n$ i $(q_k)_{k=0}^n$ wzorami

$$\begin{array}{ll} p_0 = a_0 & q_0 = 1 \\ p_1 = a_0 a_1 + 1 & q_1 = a_1 \\ p_k = p_{k-1} a_k + p_{k-2} & q_k = q_{k-1} a_k + q_{k-2}, \quad k = 2, \ldots, n. \end{array}$$

Udowodnij, że

a) $\quad R_k[a_0, \ldots, a_k] = \frac{p_k}{q_k}, \quad k = 0, \ldots, n,$

b) $\quad p_{k-1} q_k - q_{k-1} p_k = (-1)^k, \quad k = 1, \ldots, n,$

c) $\quad R_{k+1} - R_k = \frac{(-1)^k}{q_k q_{k+1}}, \quad k = 0, \ldots, n-1.$

Wywnioskuj, że jeśli liczby p_k i q_k są całkowite, to są względnie pierwsze.

Zadanie 3. Niech x będzie liczbą niewymierną. Definiujemy ciąg liczb $x_0, x_1, \ldots$ rekurencyjnie wzorem

$$x_0 = x, \quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n - [x_n]}, \qquad n \geq 0.$$

Niech ponadto $a_n = [x_n]$ dla $n \geq 0$ i niech $R_n = R_n[a_0, \ldots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$ (patrz Zadanie 2). Udowodnij, że

$$x - R_n = \frac{(-1)^n}{(q_n x_{n+1} + q_{n-1})q_n}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

oraz

$$|x - R_{n+1}| < |x - R_n|, \qquad n = 0, 1, \ldots.$$

Wywnioskuj stąd, że

$$R_0 < R_2 < R_4 < \ldots \quad x \quad \ldots < R_5 < R_3 < R_1.$$

Zadanie 4. Niech x będzie liczbą niewymierną i niech liczby $R_n = \frac{p_n}{q_n}$ będą zdefiniowane tak, jak w Zadaniu 3. Przypuśćmy, że liczby $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 1$ spełniają nierówność $|x - \frac{p}{q}| < |x - \frac{p_n}{q_n}|$. Udowodnij, że $q > q_n$.

Analiza Matematyczna I.1

Seria 3, P. Nayar, 2011/12

Zadanie 1. Znajdź kresy zbiorów

$$
\begin{aligned}
A &= \left\{ \frac{nm}{2n^2+m^2} \mid n,m \neq 0,\ n,m \in \mathbb{Z} \right\}, \\
B &= \left\{ \frac{n^2 m}{n^2+m^2+n^4 m} \mid n,m > 0,\ n,m \in \mathbb{N} \right\}, \\
C &= \left\{ \sqrt[n]{n} \mid n > 0,\ n \in \mathbb{N} \right\}, \\
D &= \left\{ \sqrt[k]{n} - [\sqrt[k]{n}] \mid n > 0,\ n \in \mathbb{N} \right\}, \quad k > 0, k \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Zadanie 2. Niech T_1 będzie zbiorem trójkątów o obwodzie 1 na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Niech R_t, r_t będą odpowiednio promieniem okręgu opisanego na trójkącie t i promieniem okręgu wpisanego w trójkąt t. Wyznacz kresy zbiorów

$$
\begin{aligned}
A &= \{\text{pole trójkąta } t \mid t \in T_1\}, \\
B &= \{r_t \mid t \in T_1\}, \\
C &= \{R_t \mid t \in T_1\},
\end{aligned}
$$

Zadanie 3. Niech $n > 1, n \in \mathbb{N}$. Wyznacz kresy zbioru

$$
A_n = \left\{ \sum_{1 \le i < j \le n} a_i a_j \mid \sum_{i=1}^{n} a_i = 1,\ a_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, n \right\}.
$$

Zadanie 4. Niech $r > 0$. Wyznacz kresy zbioru

$$
A_n = \left\{ \sum_{1 \le i \le n} a_i^r \mid \sum_{i=1}^{n} a_i = 1,\ a_i \ge 0,\ i = 1, \ldots, n \right\}.
$$

Zadanie 5. Wyznacz kresy zbioru

$$
A_n = \left\{ \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \mid a_1, \ldots, a_n > 0 \right\}.
$$

Analiza Matematyczna I.1

Seria 4, P. Nayar, 2011/12

Zadanie 1. Określamy ciągi $(a_n)_{n\geq 0}$ i $(b_n)_{n\geq 0}$ rekurencyjnie, $a_0 = a$, $b_0 = b$, $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$. Udowodnij, że ciągi te są zbieżne do tej samej granicy (nazywanej średnią arytmetyczno-geometryczną liczb a, b).

Zadanie 2. Ciąg liczb $(a_n)_{n\geq 0}$ spełnia nierówność $a_{n+m} \leq a_n + a_m$ (takie ciągi nazywamy ciągami podaddytywnymi). Udowodnij, że istnieje granica $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \in [-\infty, 0)$.

Zadanie 3. Udowodnij, że dla $n \geq 2$ prawdziwa jest nierówność

$$\left(1 + \sqrt{\frac{2}{n-1}}\right)^n \geq n$$

i wywnioskuj, że $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Zadanie 4. Niech $(a_n)_{n\geq 0}$ będzie ciągiem liczb dodatnich. Udowodnij, że jeśli $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, to również $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = g$. Czy ze zbieżności ciągu $(\sqrt[n]{a_n})$ wynika zbieżność ciągu $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$?

Zadanie 5. Oblicz granice

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$,

b) $\lim_{n\to\infty} n^{1-\frac{1}{k}}(\sqrt[k]{n+1} - \sqrt[k]{n}), \quad k \in \mathbb{N}, k \geq 1$,

c) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \ldots + \frac{n}{n^2+n}\right)$,

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}, \quad k \in \mathbb{N}, k \geq 0$,

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n}$,

f) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \ldots + a_k^n} = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}, \quad a_1, \ldots, a_k > 0$.

Analiza Matematyczna I.1

Seria 5, P. Nayar, 2011/12

Zadanie 1. Niech $(a_n)_{n\geq 0}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych zbieżnym do 1 i $a_n \neq 1$ dla $n \geq 0$. Znajdź granicę

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n + a_n^2 + \ldots + a_n^k - k}{a_n - 1}.$$

Zadanie 2. Niech $(a_n)_{n\geq 0}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych o wyrazach niezerowych i niech $\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Zadanie 3. Definiujemy ciągi $(a_n)_{n\geq 1}$ i $(b_n)_{n\geq 1}$ wzorami

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Udowodnij, że ciąg (a_n) jest rosnący, a ciąg (b_n) malejący. Wywnioskuj stąd, że ciągi te są zbieżne do tej samej granicy (oznaczanej e).

Zadanie 4. Niech $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Oblicz granicę ciągu

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{kn}.$$

Zadanie 5. Zbadaj zbieżność ciągu

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n, \quad n \geq 1.$$

Zadanie 6. Niech $f : [0,1] \to [0,1]$ będzie funkcją niemalejącą i niech $a_0 \in [0,1]$. Definiujemy ciąg $(a_n)_{n\geq 0}$ rekurencyjnie, $a_{n+1} = f(a_n)$. Udowodnij, że ciąg $(a_n)_{n\geq 0}$ jest zbieżny.

Zadanie 7. Niech $(a_n)_{n\geq 1}$ będzie ograniczonym ciągiem liczb rzeczywistych. Przypuśćmy, że

$$a_{n+1} - a_n > -\frac{1}{n^2}.$$

Udowodnij, że ciąg (a_n) jest zbieżny.

Zadanie 8. Oblicz granicę ciągu

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

Zadanie 9. Oblicz granicę ciągu

$$a_n = n\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \frac{1}{(n+n)^2}\right).$$

Zadanie 10. Zbadaj zbieżność ciągu

$$a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \qquad n \geq 1.$$

Zadanie 11. Zbadaj zbieżność ciągu

$$a_n = \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}).$$

Zadanie 12. Niech $a > 0$. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a} - 1).$$

Zadanie 13. Niech $a, b > 0$. Udowodnij, że

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n = \sqrt{ab}.$$

Zadanie 14. Niech $k \geq 2$. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\binom{nk}{n}}.$$

Analiza Matematyczna I.1

Seria 6, P. Nayar, 2011/12

Zadanie 1. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}.$$

Zadanie 2. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+n+1}{3n^3\sqrt{n}+2n^2+n+99}.$$

Zadanie 3. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt[3]{n^3+1}\right).$$

Zadanie 4. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\right)^{p}$$

w zależności o parametru $p>0$.

Zadanie 5. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$$

w zależności o parametru $\alpha\in\mathbb{R}$.

Zadanie 6. Dla $a>0$ zadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\sqrt[n]{a}-1|.$$

Zadanie 7. Dla $a>0$ zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(a+1)(a+2)\dots(a+n)}.$$

Analiza Matematyczna I.1

Seria 7, P. Nayar, 2011/12

Zadanie 1. Udowodnij, że dla $a/(2\pi) \notin \mathbb{Z}$ prawdziwe są wzory

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(ka) = \frac{\sin\left(\frac{na}{2}\right)\cos\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}.$$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin(ka) = \frac{\sin\left(\frac{na}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{a}{2}\right)},$$

W szczególności

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin(ka)\right| \leq \frac{1}{|\sin\left(\frac{a}{2}\right)|}, \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} \cos(ka)\right| \leq \frac{1}{|\sin\left(\frac{a}{2}\right)|}.$$

Zadanie 2. Niech $a \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin ka}{k}\right| < 3\sqrt{\pi}.$$

Zadanie 3. Niech $a \in \mathbb{R}$. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n}.$$

Zadanie 4. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}.$$

Zadanie 5. Przypuśćmy, że $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}| < \infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ i sumy częściowe szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ są ograniczone. Udowodnij, że dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n^k$.

Analiza Matematyczna I.1

Seria 8, P. Nayar, 2011/12

Zadanie 1. Przypuśćmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny i ciąg liczb dodatnich $(b_n)_{n\geq 1}$ jest niemalejący, a ponadto $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Udowodnij, że szereg

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{b_k}$$

jest zbieżny i

$$b_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} \frac{a_k}{b_k} \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Zadanie 2. Niech $(a_n)_{n\geq 1}$ będzie ciągiem zbieżnym. Przypuśćmy, że liczby $(c_{n,k})_{n,k\geq 1}$ spełniają warunki

i) $\sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} = 1$,

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} |c_{n,k}| \leq C$,

iii) $c_{n,k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$,

gdzie $C > 0$ jest pewną stałą. Udowodnij, że ciąg

$$b_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_{n,k} a_k$$

jest zbieżny i $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.

Zadanie 3. Przypuśćmy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny i ciąg liczb dodatnich $(b_n)_{n\geq 1}$ jest niemalejący, a ponadto $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$. Udowodnij, że

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Zadanie 4. Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{[\sqrt{k}]} \frac{1}{k}.$$

Zadanie 5. Udowodnij, że jeśli szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$$

jest zbieżny dla pewnej liczby $x_0 \in \mathbb{R}$, to jest zbieżny dla wszystkich $x > x_0$.

Zadanie 6. Udowodnij, że

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n!} \notin \mathbb{Q}$$

dla dowolnego wyboru znaków $\varepsilon_n \in \{-1, +1\}$.

Definicja. Iloczynem Cauchy'ego szeregów $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ nazywamy szereg $\sum_{n=0}^{\infty}$, gdzie $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}$.

Zadanie 7. Znajdź iloczyn Cauchy'ego szeregu $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ z samym sobą dla $|x| < 1$.

Zadanie 8. Zbadaj iloczyn Cauchy'ego szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ przez siebie.

Zadanie 9. Udowodnij, że iloczyn Cauchy'ego szeregów o wyrazach dodatnich jest rozbieżny jeśli któryś z tych szeregów jest rozbieżny.

Definicja. Niech $(b_n)_{n \geq 0}$ będzie ciągiem liczb różnych od 0. Powiemy, że iloczyn jest zbieżny, jeśli istnieje skończona i różna od 0 granica

$$\lim_{N \to \infty} \prod_{i=0}^{N} b_i.$$

Zadanie 10. Niech $a_n \geq 0$ dla $n \geq 0$. Udowodnij, że iloczyn $\prod_{n=0}^{\infty} (1 + a_n)$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

Zadanie 11. Oblicz iloczyn nieskończony

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

Zadanie 12. Dla $|x| < 1$ oblicz iloczyn nieskończony

$$\prod_{n=0}^{\infty} \left(1 + x^{2^n}\right).$$

Zadanie 13. Zbadaj zbieżność iloczynu nieskończonego

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right).$$

Zadanie 14. Zbadaj zbieżność iloczynu

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n}.$$

Zadanie 15. Zbadaj zbieżność iloczynu

$$\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{n}.$$

Analiza Matematyczna I.1

Zadania domowe, seria 1, P. Nayar, 2011/12

Zadanie 1. (*1 pkt*) Niech $n \geq 3$. Wśród n-kątów wpisanych w okrąg o promieniu 1 znajdź te o największym polu powierzchni.

Zadanie 2. • (*4 pkt*) Niech $(a_n)_{n\geq 1}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Rozstrzygnij, które z następujących własności są równoważne.

(W1) Ciąg $(a_n)_{n\geq 1}$ jest ograniczony.

(W2) Dla wszystkich $\lambda > 1$ ciąg $(a_{\lfloor 2^{\lambda^n} \rfloor})_{n\geq 1}$ jest ograniczony.

(W3) Dla wszystkich $\lambda > 1$ ciąg $(a_{\lfloor \lambda^{2^n} \rfloor})_{n\geq 1}$ jest ograniczony.

Zadanie 3. (*2 pkt*) Niech $x_1, \ldots, x_n$ będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Załóżmy, że istnieją liczby rzeczywiste s, t o tej własności, że $0 < s \leq \sqrt{x_i} \leq s + t$ dla $i = 1, \ldots, n$. Udowodnij, że

$$-t^2 + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{x_i} \right)^{-1} \leq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

dla dowolnych liczb dodatnich $p_1, \ldots, p_n$, spełniających warunek $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Zadanie 4. (*1 pkt*)

a) Udowodnij, że dla dowolnej liczby niewymiernej α istnieje ciąg liczb całkowitych $(p_n)_{n\geq 1}$ i ciąg liczb całkowitych dodatnich $(q_n)_{n\geq 1}$, dla których

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{nq_n} \leq \frac{1}{q_n^2}.$$

b) Przypuśćmy, że liczba α jest liczbą algebraiczną stopnia $d \geq 2$. Udowodnij, że istnieje stała $C_\alpha > 0$ o tej własności, że dla wszystkich $p, q \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ mamy

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{C_\alpha}{q^d}.$$

Zadanie 5. ∘ (*2 pkt*) Niech $S_m(k) = 1^m + \ldots + k^m$ dla liczb całkowitych $m \geq 0$ i $k \geq 1$. Udowodnij, że

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n+1}{j} S_j(k) = (k+1)^{n+1} - 1.$$

Wyznacz $S_i(k)$ dla $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Analiza Matematyczna I.1

Zadania domowe, seria 2, P. Nayar, 2011/12

Zadanie 1. • (*4 pkt*)

a) Udowodnij, że dla $n \geq 1$ liczba

$$\cos^n\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos^n\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos^n\left(\frac{5\pi}{7}\right)$$

jest wymierna.

b) Udowodnij, że dla $n \geq 2$ liczba $\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3}$ jest niewymierna.

Zadanie 2. (*2 pkt*) Niech ABC będzie trójkątem wpisanym w okrąg o promieniu 1 i niech P będzie punktem wewnętrznym tego trójkąta. Udowodnij, że

$$|PA| \cdot |PB| \cdot |PC| < \frac{32}{27}.$$

Zadanie 3. (*1 pkt*) Niech $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1, 0, 1\}$. Udowodnij, że

$$\varepsilon_1\sqrt{2 + \varepsilon_2\sqrt{2 + \ldots + \varepsilon_n\sqrt{2}}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2 \cdot \ldots \cdot \varepsilon_k}{2^{k-1}}\right), \quad n \geq 1.$$

Zadanie 4. (*1 pkt*) Niech $f : [0,1] \to [0,1]$ będzie funkcją rosnącą. Rozstrzygnij, czy musi istnieć $x \in [0,1]$ o tej własności, że $f(x) = x$.

Zadanie 5. ∘ (*2 pkt*) Dla $n \geq 1$ przyjmujemy konwencję $\binom{n}{i} = 0$ dla $i < 0$ i $i > n$. Udowodnij, że dla $n \geq 1$ i $k \in \mathbb{Z}$ prawdziwe są tożsamości

a)

$$\binom{2n}{k} = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\binom{n}{j}\binom{n}{k-j},$$

b)

$$\binom{2n}{n+k} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} 2^{n-k-2j}\binom{n}{j}\binom{n-j}{j+k}.$$

Analiza Matematyczna I.1

Zadania domowe, seria 3, P. Nayar, 2011/12

Zadanie 1. (*2 pkt*) Niech $n \geq 2$. Wyznacz kresy zbioru

$$A_n = \left\{ \frac{a_1}{a_1 + a_2} + \frac{a_2}{a_2 + a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} + a_n} + \frac{a_n}{a_n + a_1} \mid a_1, \ldots, a_n > 0 \right\}.$$

Czy kresy należą do zbioru A_n?

Zadanie 2. ∘ (*2 pkt*) Oblicz

a) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+\lfloor an \rfloor}} \right), \quad a > 1$

b) $\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}} - \frac{1}{k+1} \right), \quad k \in \mathbb{N}.$

Zadanie 3. • (*4 pkt*) Zbadaj zbieżność ciągu zadanego rekurencyjnie,

$$a_1 = 1, a_2 = 1, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n-1}}.$$

Zadanie 4. (*1 pkt*) Niech $c > 0$. Rozważmy ciąg

$$a_0 = 1, a_1 = c, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}.$$

Zbadaj zbieżność ciągu $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n\geq 0}$.

Zadanie 5. (*1 pkt*) Wyznacz kresy zbioru

$$B = \left\{ \frac{1}{\sqrt[n]{m}} + \frac{1}{\sqrt[m]{n}} \;\middle|\; n, m \geq 1, n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Analiza Matematyczna I.1

Zadania domowe, seria 4, P. Nayar, 2011/12

Zadanie 1. (*1 pkt*) Niech $k \in \mathbb{N}, k \geq 0$. Definiujemy ciąg rekurencyjnie

$$x_0 > 0, \quad x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n^k}.$$

Zbadaj istnienie granicy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{\sqrt[k+1]{n}}.$$

Zadanie 2. (*2 pkt*) Niech $(a_n)_{n\geq 0}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych spełniającym

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0, \quad \lim_{n\to\infty}(a_{2n} - 2a_n) = 0.$$

Czy z tego wynika, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$?

Zadanie 3. • (*4 pkt*) Oblicz granicę

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

Zadanie 4. (*1 pkt*) Niech $(a_n)_{n\geq 0}$ będzie ograniczonym ciągiem liczb rzeczywistych. Niech $m = \liminf_{n\to\infty} a_n$, $M = \limsup_{n\to\infty} a_n$. Przypuśćmy, że istnieje ciąg $(\varepsilon_n)_{n\geq 0}$ taki, że

$$\varepsilon_n > 0, \quad a_{n+1} > a_n - \varepsilon_n, \quad \varepsilon_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Udowodnij, że każda liczba z przedziału $[m, M]$ jest punktem skupienia ciągu $(a_n)_{n\geq 0}$.

Zadanie 5. ∘ (*2 pkt*) Niech $c \geq 0$. Zbadaj zbieżność ciągu

$$a_1 = \sqrt{c}, \quad a_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}}, \quad a_3 = \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c}}}, \quad \ldots.$$

Analiza Matematyczna I.1

Zadania domowe, seria 5, P. Nayar, 2011/12

Zadanie 1. (*1 pkt*) Zbadaj istnienie granicy ciągu

$$a_n = \sqrt[n]{|\cos n|}, \quad n > 0.$$

Zadanie 2. (*2 pkt*) Niech $\alpha \in (0, 1]$ i niech $(a_n)_{n\geq 0}$ będzie ograniczonym ciągiem liczb rzeczywistych spełniającym

$$a_{n+1} \leq \alpha a_n + (1-\alpha)a_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Udowodnij, że ciąg $(a_n)_{n\geq 0}$ jest zbieżny.

Zadanie 3. • (*4 pkt*) Definiujemy ciąg

$$a_n = \frac{(n^2+1)(n^2+2)\dots(n^2+n)}{(n^2-1)(n^2-2)\dots(n^2-n)}, \quad n \geq 2.$$

a) Udowodnij, że $\lim_{n\to\infty} a_n = e$.

b) Udowodnij, że $\lim_{n\to\infty} n(a_n - e) = e$.

Zadanie 4. (*1 pkt*) Niech $c > 0$. Definiujemy ciąg $(a_n)_{n\geq 0}$ rekurencyjnie, $a_0 = c$, $a_{n+1} = c^{a_n}$, $n \geq 0$. Zbadaj zbieżność ciągu (a_n).

Zadanie 5. (*2 pkt*) Rozważmy ciąg $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \sin(a_n)$, $n \geq 0$. Czy istnieje liczba $\alpha > 0$, dla której granica $\lim_{n\to\infty} n^\alpha a_n$ jest dodatnia i skończona?

Uwaga: Nie ma zadania pisemnego ∘.

Analiza Matematyczna I.1

Zadania domowe, seria 6, P. Nayar, 2011/12

Zadanie 1. (*1 pkt*) Niech $(a_n)_{n\geq 1}$ będzie ciągiem dodatnim. Czy ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} n^{12} a_n^4$?

Zadanie 2. ∘ (*2 pkt*) Zbadaj zbieżność szeregów

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{n} - 1)^p, \quad p > 0,$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^3}}{e^{n^2}}.$

Zadanie 3. • (*4 pkt*)

a) Czy dla każdej bijekcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nf(n)}$ jest zbieżny?

b) Czy dla każdej bijekcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+f(n)}$ jest rozbieżny?

Zadanie 4. (*1 pkt*) Zbadaj zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} (\cos n)^n$.

Zadanie 5. (*2 pkt*) Niech $(a_n)_{n\geq 1}$ będzie dowolnym ciągiem.

a) Czy ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$?

b) Czy ze zbieżności szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$?

Analiza Matematyczna I.1

Zadania domowe, seria 7, P. Nayar, 2011/12

Zadanie 1. (*1 pkt*) Udowodnij, że liczba $\sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$ jest przestępna.

Zadanie 2. ∘ (*2 pkt*) Zbadaj zbieżność szeregów

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n}\binom{2n}{n}$,

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(\ln n)\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$.

Zadanie 3. • (*4 pkt*) Zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[n\sqrt{2}]}}{n}.$$

Zadanie 4. (*1 pkt*) Niech $(a_n)_{n\geq 0}$ będzie malejącym ciągiem zbieżnym do 0. Niech $S_n = \sum_{i=n}^{\infty}(-1)^{i-n}a_i$. Udowodnij, że szeregi $\sum_{n=0}^{\infty} S_n^2$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n S_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ są jednocześnie zbieżne lub jednocześnie rozbieżne.

Zadanie 5. (*2 pkt*) Niech $(a_n)_{n\geq 0}$ będzie ciągiem liczb dodatnich. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne

(W1) $\liminf_{n\to\infty} na_n > 0$.

(W2) Dla każdego nierosnącego ciągu $(b_n)_{n\geq 0}$ jeśli $b_k \geq a_k$ dla nieskończenie wielu $k \geq 0$, to $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$.

Analiza Matematyczna I.1

Zadania domowe, seria 8, P. Nayar, 2011/12

Zadanie 1. (*1 pkt*) Udowodnij, że każdą funkcję lipschitzowską $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ można przedstawić w postaci różnicy funkcji niemalejących.

Zadanie 2. ∘ (*2 pkt*) Zbadaj zbieżność (określ, czy są zbieżne do 0, do ∞, do granicy skończonej dodatniej lub nie mają granicy) następujących iloczynów nieskończonych

a) $\prod_{n=1}^{\infty} n \operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)$,

b) $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{2011}$.

Zadanie 3. • (*4 pkt*) Niech $a_1, \ldots, a_n$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Udowodnij nierówność

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2^n} \sum_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n \in \{-1,+1\}} \left| \sum_{i=1}^{n} a_i \varepsilon_i \right|.$$

Zadanie 4. (*1 pkt*) Dla $n \geq 1$ udowodnij nierówności

$$\frac{1}{4(n+1)} < \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(-1)^{i-n}}{2i+1} < \frac{1}{4n}.$$

Zadanie 5. (*2 pkt*) Czy istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która ma własność Darboux, ale nie jest ciągła w żadnym punkcie?

Analiza Matematyczna I.1

Mecz 1, P. Nayar, 2011/12

Zadanie 1. (*1 pkt*) Dla jakich liczb $\alpha \in \mathbb{R}$ ciąg $(\{n\alpha\})_{n\geq 1}$ jest gęsty w odcinku $[0,1]$?

Zadanie 2. (*4 pkt*) Niech $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ i niech $\lambda_i \geq 0$ spełniają warunek $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Udowodnij, że

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^{-1}\right) \leq \frac{(x_1+x_n)^2}{4x_1x_n}.$$

Zadanie 3. (*3 pkt*) Dla $n \geq 1$ niech $a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1}$. Udowodnij, że $a_n = \frac{n+1}{2n} a_{n-1} + 1$, $n \geq 2$. Udowodnij, że $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

Zadanie 4. (*5 pkt*) Niech $(a_n)_{n\geq 1}$ będzie ciągiem liczb dodatnich. Udowodnij nierówność

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} < e \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Zadanie 5. (*1 pkt*) Niech $(a_n)_{n\geq 1}$ i $(b_n)_{n\geq 1}$ będą ciągami dodatnimi. Rozstrzygnij, czy ze zbieżności szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ wynika zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, b_n\}$?

Zadanie 6. (*2 pkt*) Dla $a \in (0,1)$ zbadaj zbieżność szeregu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}.$$

Zadanie 7. (*3 pkt*) Niech $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ będzie rozbieżnym szeregiem o wyrazach dodatnich i niech $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Udowodnij, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n}$ jest również rozbieżny.

Zadanie 8. (*4 pkt*) Rozważmy ciąg zadany rekurencyjnie $a_{n+1} = 4a_n(1-a_n)$. Niech $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$. Udowodnij, że istnieje $a_1 \in [0,1]$ takie, że $a_{p+1} = a_1$ i $a_i \neq a_1$ dla $i = 2, 3, \ldots, p$. Innymi słowy, ciąg (a_n) ma okres p.

Zadanie 9. (*3 pkt*) Niech $(a_n)_{n\geq 1}$ będzie ciągiem liczb dodatnich. Przypuśćmy, że

$$\lim_{n\to\infty} n \ln\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) = g.$$

Udowodnij, że jeśli $g > 1$, to szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, a jeśli $g < 1$, to szereg ten jest rozbieżny.

Zadanie 10. (*1 pkt*) Dla $n \geq 1$ udowodnij nierówność

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{2}{3}.$$

Analiza Matematyczna I.1

Mecz 2, P. Nayar, 2011/12

Zadanie 1. (*1 pkt*) Podać przykład funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ której zbiorem punktów nieciągłości jest zbiór liczb wymiernych.

Zadanie 2. (*3 pkt*) Udowodnij, że zbiór punktów ciągłości funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest zbiorem typu $\mathcal{G}_\delta$.

Zadanie 3. (*5 pkt*) Wyznacz wszystkie funkcje ciągłe spełniające równanie funkcyjne

$$f(x+y) + f(y-x) = 2f(x)f(y).$$

Zadanie 4. (*4 pkt*) Powiemy, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest afinicznie parzysta jeśli istnieje $a \in \mathbb{R}$ takie, że $f(a-x) = f(a+x)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Rozstrzygnij, czy każda funkcja ciągła jest sumą dwóch afinicznie parzystych funkcji ciągłych.

Zadanie 5. (*2 pkt*) Niech $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Przyjmijmy $a_{n+1} = a_1$ i niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją wypukłą. Udowodnij nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} f(a_k)a_{k+1} \geq \sum_{k=1}^{n} f(a_{k+1})a_k.$$

Zadanie 6. (*3 pkt*) Niech $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq -1$ będą liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek $\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = 0$. Udowodnij, że $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \frac{n}{3}$.

Zadanie 7. (*5 pkt*) Udowodnij, że dla $x \in (0, \pi)$ i $n \geq 1$ prawdziwa jest nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} > 0.$$

Zadanie 8. (*1 pkt*) Niech $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie wielomianem stopnia $d \geq 1$. Zbadaj istnienie granicy

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{W(\lfloor x \rfloor)}{W(x)}.$$

Zadanie 9. (*3 pkt*) Oblicz sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)^3}{(2n+1)^4 + 4}.$$

Zadanie 10. (*4 pkt*) Niech $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą spełniającą warunek

$$\lim_{n \to \infty} f\left(\frac{x}{n}\right) = 0$$

dla każdego $x > 0$. Udowodnij, że $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

Analiza Matematyczna I.1

Mecz 3, P. Nayar, 2011/12

Zadanie 1. (*4 pkt*) Udowodnij nierówność

$$\mathrm{tg}(\sin x) > \sin(\mathrm{tg} x), \quad x \in (0, \pi/2).$$

Zadanie 2. (*4 pkt*) Niech $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ będą liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Rozstrzygnij, czy funkcja

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(b_k x)$$

musi mieć miejsce zerowe.

Zadanie 3. (*2 pkt*) Funkcja klasy $C^1([0,1])$ spełnia nierówność $|f'(x)| \leq \lambda |f(x)|$ dla pewnej stałej $\lambda > 0$ oraz $f(0) = 0$. Czy z tego wynika, że $f(x) = 0$ dla wszystkich $x \in [0,1]$?

Zadanie 4. (*2 pkt*) Udowodnij nierówność

$$\cos x \leq e^{-x^2/2}, \quad x \in [0, \pi].$$

Zadanie 5. (*5 pkt*) Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją klasy $C^\infty(\mathbb{R})$. Przypuśćmy, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje liczba naturalna $n(x)$ o tej własności, że $f^{(n(x))}(x) = 0$. Czy z tego wynika, że f jest wielomianem?

Zadanie 6. (*3 pkt*) Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{e}{2n+2} < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{2n+1}.$$

Zadanie 7. (*3 pkt*) Niech m, n będą dodatnimi liczbami naturalnymi i niech

$$f(m,n) = \sum_{k=1}^{\infty} k^n \left(\frac{m}{m+1}\right)^k.$$

Udowodnij, że $f(m,n)$ jest liczbą naturalną.

Zadanie 8. (*3 pkt*) Niech $(a_n)_{n \geq 1}$ będzie ciągiem liczb rzeczywistych. Przypuśćmy, że dla każdego $t \in \mathbb{R}$ istnieje granica $\lim_{n\to\infty} e^{ita_n}$. Czy z tego wynika, że ciąg a_n jest zbieżny do granicy skończonej?

Zadanie 9. (*5 pkt*) Udowodnij, że płaszczyzny nie da się pokryć kołami domkniętymi o parami rozłącznych wnętrzach.

Zadanie 10. (*4 pkt*) Dla $\varepsilon > 0$ niech

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k - \varepsilon, k + \varepsilon).$$

Czy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ prostą $\mathbb{R}$ można przedstawić jako skończoną sumę zbiorów postaci $aS = \{ax \mid x \in S\}$, $a \in \mathbb{R}$?