Kilka zadań do samodzielnego zrobienia

20 grudnia

1. Niech $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie endomorfizmem zależnym od $t \in \mathbb{R}$ zadanym wzorem $\phi((x_1, x_2, x_3)) = (4x_1 - x_2 + 2x_3, x_1 + 2x_2 + 2x_3, 2x_1 - 2x_2 + tx_3)$. Dla jakiej wartości t wektor $(1, 1, 2)$ jest wektorem własnym ϕ?

2. Endomorfizm $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zależy od parametru $s \in \mathbb{R}$ i dany jest wzorem $\psi((x_1, x_2)) = (sx_1 + 3x_2, -x_1 + 2x_2)$. dla jakiej wartości s liczba 5 jest wartością własną ψ?

3. Znaleźć wartości własne i bazy podprzestrzeni własnych endomorfizmu $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadanego wzorem $\phi((x_1, x_2, x_3)) = (-x_1 - 8x - 2 + 8x_3, -4x_1 - 5x_2 + 8x_3, -4x_1 - 8x_2 + 11x_3)$.

4. Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$ znaleźć taką macierz diagonalną D oraz taką macierz odwracalną C, że $D = C^{-1}AC$. Podać wzór na A^n.

5. Zadano w $\mathbb{R}^4$ wektory $v_1 = (1, 2, 1, 1), v_2 = (3, 4, 1, 2), v_3 = (3, 2, 1, -1)$. Zastosować do układu v_1, v_2, v_3 proces ortogonalizacji Grama-Schmidta. Niech $w = (1, 0, 0, 0)$. Znaleźć w $V = lin(v_1, v_2, v_2)$ wektor v, dla którego liczba $||v - w||$ osiąga najmniejszą wartość. Obliczyć obraz wektora w w symetrii prostopadłaej względem V.

Odpowiedzi: 1. $t = 7$, 2. $s = 6$, 3. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3, V_{(-1)} = lin((1, 1, 1))$, $\dim V_{(3)} = 2$ i jest opisana równaniem $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$, 4. $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ (lub $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$). $A^n = \begin{bmatrix} 3 - 2^{n+1} & 2^n - 1 \\ 6 - 6 \cdot 2^n & 3 \cdot 2^n - 2 \end{bmatrix}$. 5. Standardowa realizacja algorytmu G-S daje $w_1 = (1, 2, 1, 1), w_2 = (1, 0, -1, 0), w_3 = (1, 0, 1, -2)$. Szukany wektor v to rzut prostopadły w na V czyli $v = \frac{1}{7}w_1 + \frac{1}{2}w_2 + \frac{1}{6}w_3$.Obraz w symetrii to $2v - w$.