Rzuty i symetrie prostopadłe

Mirosław Sobolewski

15 grudnia 2015 roku

Jeśli V jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^n$ to oznaczamy $V^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n : \forall v \in V \text{zachodzi } v \perp w\}$ (mówimy: dopełnienie ortogonalne V). Czyli $V^\perp$ to zbiór tych wektorów, które są jednocześnie prostopadłe do wszystkich wektorów V. Zachodzi $V \cap V^\perp = \{\mathbf{0}\}$ i każdy wektor $w \in \mathbb{R}^n$ jednoznacznie przedstawia się jako suma $w = v + u$, w której $v \in V$, $u \in V^\perp$. Zwykle v nazywamy V-składową wektora w zaś u składową prostopadłą do V tego wektora. To przedstawienie wektora w definiuje dwa endomorfizmy $\mathbb{R}^n$ zdefiniowane przez równości $P_V(w) = v$ oraz $S_V(w) = v - u$. P_V nazywamy rzutem prostopadłym na V natomiast S_V symetrią prostopadłą względem V. Np. Jeśli $V = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ (oś X-ów) to rzut prostopadły P_V jest endomorfizmem $\mathbb{R}^2$ zdefiniowanym przez $P_V((x_1,x_2)) = (x_1,0)$ natomiast symetria prostopadła względem V jest zdefiniowana przez $S_V((x_1,x_2)) = (x_1,-x_2)$. Zauważmy, że P_V i S_V są endomorfizmami diagonalizowalnymi $\mathbb{R}^n$, przy czym V pełni dla nich rolę przestrzeni własnej wartości własnej 1 (tzn. $P_V(v) = v$ i $S_V(v) = v$ dla $v \in V$, natomiast $V^\perp$ jest dla P_V przestrzenią własną wartości własnej 0, zaś dla S_V przestrzenią własną wartości własnej -1 (czyli $P_V(u) = \mathbf{0}$ i $S_V(u) = -u$ dla $u \in V^\perp$). Mając w V bazę ortogonalną złożoną z wektorów $v_1, v_2, \ldots, v_k$ możemy obliczać P_V ze wzoru $P_V(w) = \frac{w \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{w \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2 + \cdots + \frac{w \cdot v_k}{v_k \cdot v_k} v_k$ (**Uwaga!**, aby korzystać z tego wzoru baza musi być ortogonalna, jeśli dysponujemy tylko zwykłą bazą V to należy ją zastąpić bazą ortogonalną, np. stosując ortogonalizację Grama-Schmidta). Można także, obliczyć pozostałe rzuty i symetrie związane z V korzystając ze wzorów: $P_{V^\perp}(w) = w - P_V(w)$, $S_V(w) = 2P_V(w) - w$, $S_{V^\perp}(w) = -S_V(w)$ dla $w \in \mathbb{R}^n$. Przykład: w wykładzie http://www.mimuw.edu.pl/ msobol/wykl/ilskal3.pdf w slajdzie 13 rozważaliśmy podprzestrzeń $V = lin(v_1, v_2, v_3) \subset \mathbb{R}^5$, gdzie $v_1 = (1,0,0,1,0)$, $v_2 = (0,0,0,1,1)$, $v_3 = (1,0,0,0,1)$. Niech $w = (6,1,0,0,0)$. Chcemy obliczyć $P_V(w)$ oraz $S_V(w)$. Skorzystamy z otrzymanej w procesie Grama-Schmidta bazy ortogonalnej V złożonej z wektorów $w_1 = (1,0,0,1,0), w_2 = (-1/2,0,0,1/2,1), w_3 = (2/3,0,0,-2/3,2/3)$. Zatem $P_V(w) = \frac{w \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 +$

$\frac{w \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2 + \frac{w \cdot w_3}{w_3 \cdot w_3} w_3 = 3w_1 - 2w_2 + 3w_3 = (6, 0, 0, 0, 0)$. Stąd $S_V(w) = 2P_V(w) - w = 2 \cdot (6, 0, 0, 0, 0) - (6, 1, 0, 0, 0) = (6, -1, 0, 0, 0)$. Proszę obliczyć $P_{V^\perp}(w)$ i $S_{V^\perp}(w)$.