Zadania przygotowawcze, 3 kolokwium

Mirosław Sobolewski

18 grudnia 2011

1. Niech $\phi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bedzie endomorfizmem określonym wzorem $\phi_t((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_3, tx_1 + 2x_2, x_2 + 2x_3)$, gdzie parametr $t \in \mathbb{R}$. a) Zbadać dla jakiej wartości $t \in \mathbb{R}$ liczba 3 jest wartością własną ϕ_t

b) Czy istnieje taka wartość $t \in \mathbb{R}$, by wektor $v = (1, 1, 0)$ był wektorem własnym ϕ_t. Jeśli tak to podać tę wartość $t \in \mathbb{R}$ oraz wartość własną odpowiadającą v.

2. Niech $\psi_s : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie endomorfizmem zadanym wzorem $\psi((x_1, x_2, x_3)) = 4x_1 + 2x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + sx_3, 2x_3)$. a) Wyznaczyć wielomian charakterystyczny w_{ψ_s}, znaleźć wartości własne ψ_s

b) Znaleźć bazy podprzestrzeni własnych ψ_s dla $s = 0$. Czy istnieje dla $s = 0$ baza $\mathbb{R}^3$ złożona z wektorów własnych

c) Zbadać dla jakich $s \in \mathbb{R}$ istnieje baza $\mathbb{R}^3$ złożona z wektorów własnych i podać taką bazę. Określić jaka jest wtedy macierz ψ_s w takiej bazie.

3. Niech macierz $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$

a) Uzasadnić, że A jest diagonalizowalna, oraz wskazać taką macierz $C \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$, że macierz $C^{-1}AC$ jest diagonalna

b) Podać wzór na A^n dla $n = 1, 2, \ldots$

c) Wskazać taką pewną macierz $b \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$, że $B^2 = A$

4. Niech $v_1 = (1, 1, 2), v_2 = (2, 0, 1)$, wektory $\mathbb{R}^3$ i niech $V = lin(v_1, v_2)$. Zbadać dla jakich wartości $t, s \in \mathbb{R}$ wektor $w = (2, t, s + 1)$ należy do $V^\perp$.

5. Niech $v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (4, 2, 4, 2), v_3 = (1, 0, 0, 0)$, wektory $\mathbb{R}^4$. Zastosować do układu złożonego z v_1, v_2, v_3 proces ortogonalizacji Grama–Schmidta, a następnie unormować tak otrzymaną bazę $lin(v_1, v_2, v_3)$.

6. a) Znaleźć bazę ortogonalną podprzestrzeni $V \subset \mathbb{R}^4$ opisanej układem równań liniowych jednorodnych $U : \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

b) podać wzór na rzut ortogonalny na V

c) podać wzór na symetrię ortogonalną względem V

7. Niech $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$. Znaleźć wzór na rzut prostopadły na V oraz na symetrię prostopadłą względem V S_V.

Rozwiązania

1. Oznaczmy przez $A_t = M(\phi_t)_{st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ t & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Wiadomo, że liczba λ jest wartością własną $\phi_t \Leftrightarrow \det(A_t - \lambda I) = 0$. Zatem, musi być $\det(A_t - 3I) = \det \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ t & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = 0$ czyli $-2 + t = 0$. Zatem 3 jest wartością własną ϕ_t jedynie dla $t = 2$.

b) Jeśli v jest wektorem własnym dla wartości własnej λ, to mamy $\phi_t(v) = \phi_t((1, 1, 0)) = (1, t + 2, 1) = \lambda v = (\lambda, \lambda, 0)$, co jest sprzecznością, czyli nie można dobrać takiej wartości t.

2. Wielomianem charakterystycznym ψ_s jest $\det(M(\psi_s)_{st} - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & s \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda^2 - 5\lambda + 6)(2 - \lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 3)(2 - \lambda)$. Są zatem dwie wartości własne: $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_2 = 3$

b) dla $s = 0$ możemy wyznaczyć bazy podprzestrzeni własnych:

$V_{(2)} = \{(x_1, x_2, x_3) | \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$. Rozwiązując układ równań opisujący $V_{(2)}$ mamy: $x_3 = 0, x_1 = -x_2$, czyli $V_{(2)} = lin((-1, 1, 0)$ i $\dim V_{(2)} = 1$

$V_{(3)} = \{(x_1, x_2, x_3) | \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\}$. Rozwiązując układ równań opisujący $V_{(3)}$ mamy: $x_3 = 0, x_1 = -2x_2$, czyli $V_{(3)} = lin((-2, 1, 0)$ i $\dim V_{(2)} = 1$. Mamy więc $dim V_{(2)} + dim V_{(3)} = 1 + 1 = 2 < dim \mathbb{R}^3 = 3$ czyli nie istnieje baza $\mathbb{R}^3$ złożona z wektorów własnych ψ_s dla $s = 0$

b) ponieważ niezależnie od s mamy $V_{(3)} = lin((-2, 1, 0))$ czyli $dim V_{(3)} = 1$, zatem trzeba tak dobrać s aby $\dim V_{(2)} = 2$. $V_{(2)}$ jest opisane przez $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & s \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, czyli przez układ równań lin. jednorodnych, którego macierzą współczynników jest $M = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & s \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Wymiar $dimV_{(2)} = 3 - r(M)$. Trzeba więc dobrać s tak , by rząd $r(M)$ wynosił 1 czyli $s = -\frac{1}{2}$. Dla tej wartości s mamy $V_{(2)} : x_1 = -x_2 - \frac{1}{2}x_3$, czyli $V_{(2)}$ ma bazę złożoną z wektorów $w_1 = (-1, 1, 0), w_2 = (-\frac{1}{2}, 0, 1)$. Oznaczając $v = (-2, 1, 0)$, wektor własny dla $\lambda = 3$, w $\mathbb{R}^3$ mamy bazę $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, v\}$ złożoną z wektorów własnych ψ_s dla $s = -\frac{1}{2}$. Macierzą $\psi_{-\frac{1}{2}}$ w tej bazie jest $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

3. Traktujemy macierz A jako macierz pewnego endomorfizmu w bazie standardowej. Wielomian charakterystyczny macierzy (a więc i endomorfizmu) to $w_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 7-\lambda & 3 \\ -6 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (7-\lambda)(-2-\lambda)+18 = \lambda^2 - 5\lambda + 4 = (\lambda-1)(\lambda-4)$, czyli endomorfizm ma dwie wartości własne $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = 4$. Wyznaczamy podprzestrzenie własne $V_{(1)}$: $\begin{bmatrix} 7-1 & 3 \\ -6 & -2-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ Rozwiązujemy ten układ równań otrzymując $2x_1 + x_2 = 0$ czyli $x_2 = -2x_1$. Zatem $V_{(1)} = lin((1, -2))$. Podobnie wyznaczamy $V_{(4)}$: $\begin{bmatrix} 7-4 & 3 \\ -6 & -2-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Otrzymujemy równoważne równanie $x_2 = -x_1$ czyli $V_{(4)} = lin((1, -1))$. W bazie złożonej kolejno z wektorów $(1, -2), (1, -1)$ endomorfizm ma macierz $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ (bo $(1, -2)$ jest wektorem wł. dla 1, zaś $(1, -1)$ – dla 4). Stąd, jeśli przyjmiemy $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ to $D = C^{-1}AC$ (bo C jest macierzą zamiany wsp. od bazy $\{(1, -2), (1, -1)\}$ do bazy standardowej). Inaczej: $A = CDC^{-1}$. Dzięki temu możemy policzyć $A^n = CD^nC^{-1} = C \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{bmatrix} C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4^n \\ -2 & -4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 2 - 2 \cdot 4^n & 2 - 4^n \end{bmatrix}$. Podobnie możemy znaleźć macierz B spełniającą $B^2 = A$ korzystając z tego, że $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 = D$ i przyjmując $B = C \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} C^{-1}$ (uwaga: mogą być również inne macierze

w roli B).

4. Aby $w \in V^{\perp}$ potrzeba i wystarcza, by $w \perp v_1$ oraz $w \perp v_2$. Mamy stąd układ dwu równań:$2 + t + 2(s + 1) = 0$ oraz $4 + s + 1 = 0$. Rozwiązując dostajemy $s = -5, t = 6$.

5. Stosujemy proces ortogonalizacji Grama– Schmidta:

$w_1 = v_1 = (1, 1, 1, 1), W_1 = lin(w_1)$,

$w_2 = v_2 - P_{W_1}(v_2) = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 = (4, 2, 4, 2) - \frac{12}{4}(1, 1, 1, 1) = (1, -1, 1, -1)$. $W_2 = lin(w_1, w_2)$

$w_3 = v_3 - P_{W_2}(v_3) = v_3 - (\frac{v_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} w_1 + \frac{v_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} w_2) = (1, 0, 0, 0) - (\frac{1}{4}(1, 1, 1, 1) + \frac{1}{4}(1, -1, 1, -1)) = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0)$. Otrzymany układ w_1, w_2, w_3 jest istotnie ortogonalny tworzy więc bazę ortogonalną $lin(w_1, w_2, w_3) = lin(v_1, v_2, v_3)$. Po unormowaniu dostajemy układ $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), (\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, który jest ortonormalny.

6. Weźmy jako v_1 jakikolwiek wektor z V, np. $v_1 = (-1, 1, 1, 0)$. Teraz szukamy $v_2 \in V$, który jednocześnie spełnia $v_2 \perp v_1$. Otrzymujemy więc, że v_2 spełnia układ U' : $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ powstały z U przez dołączenie warunku prostopadłości do v_1 czyli $-x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Znajdujemy niezerowy wektor spełniający U', np. $v_2 = (1, 5, -4, 3)$. otrzymaliśmy więc bazę ortogonalną V: $\{v_1, v_2\}$

b) otrzymana w a) bazę można wykorzystać do znalezienia wzorów. Mamy $P_V(w) = \frac{w \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 + \frac{w \cdot v_2}{v_2 \cdot v_2} v_2$. Podstawiając $w = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, mamy $P_V(w) = P_V((x_1, x_2, x_3, x_4)) = \frac{-x_1 + x_2 + x_3}{3}(-1, 1, 1, 0) + \frac{x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 3x_4}{51}(1, 5, -4, 3) = \ldots$

c) Wzór na symetrię otrzymujemy z $S_V((x_1, x_2, x_3, x_4)) = 2P_V((x_1, x_2, x_3, x_4)) - (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

7. Moglibyśmy, tak jak poprzednio, poszukać bazy ortogonalnej V i w oparciu o nią znaleźć wzór na P_V. Ale zwróćmy uwagę na to, że $V = W^{\perp}$, gdzie $W = lin((1, 1, -1, 1))$ (wektor rozpinający W postał z kolejnych współczynników równania opisującego V, zob. wykład). Możemy zatem znaleźć wzór na P_W i skorzystać z tego, że $P_V = P_{W^{\perp}} = id - P_W$, inaczej mówiąc dla dowolnego $u \in \mathbb{R}^4$ zachodzi $P_V(u) = u - P_W(u)$. Zatem z ogólnego wzoru mamy $P_W((x_1, x_2, x_3, x_4)) = \frac{(1,1,-1,1) \circ (x_1,x_2,x_3,x_4)}{(1,1,-1,1) \circ (1,1,-1,1)}(1, 1, -1, 1) = (\frac{x_1 + x_2 - x_3 + x_4}{4}, \frac{x_1 + x_2 - x_3 + x_4}{4}, \frac{-x_1 - x_2 + x_3 - x_4}{4}, \frac{x_1 + x_2 - x_3 + x_4}{4})$ czyli $P_V((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (x_1, x_2, x_3, x_4) - P_W((x_1, x_2, x_3, x_4)) = (\frac{3x_1 - x_2 + x_3 - x_4}{4}, \frac{-x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4}{4}, \frac{x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4}{4}, \frac{-x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4}{4})$. Wzór na symetrię mozna obliczyć, z jednej z zależności: $S_V = P_V - P_{V^{\perp}} = 2P_V - id$.

Uwaga Korzystając z podanego na wykładzie wzoru $P_V(u) = P_{v_1}(u) +$

$\cdots + P_{v_k}(u) = \frac{v_1 \circ u}{v_1 \circ v_1} v_1 + \cdots + \frac{v_k \circ u}{v_k \circ v_k} v_k$, gdzie P_{v_i} oznacza rzut prostopadły na prostą $lin(v_i)$, należy zwrócić uwagę na to, że $v_1, \ldots, v_k$ stanowią bazę ortogonalną V. W innym wypadku wzór staje się nieprawdziwy. Chcąc go więc zastosować należy wpierw znaleźć bazę ortogonalną V (np. przez proces ortogonalizacji Grama-Schmidta).