3 Kolokwium z algebry

17 grudnia

Proszę na wszystkich kartkach z rozwiązaniami wpisać kod 1001101

1.

a) Niech $\phi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie endomorfizmem określonym wzorem $\phi_t((x_1, x_2, x_3)) = (x_1 + x_3, tx_1 - x_2, 2x_2 + x_3)$, gdzie parametr $t \in \mathbb{R}$. Zbadać dla jakiej wartości $t \in \mathbb{R}$ liczba 2 jest wartością własną ϕ_t

b) Niech $\psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ będzie endomorfizmem zadanym wzorem $\psi((x_1, x_2, x_3)) = (3x_1 - x_2 + x_3, 2x_1, x_3)$. Wyznaczyć wielomian charakterystyczny w_ψ i znaleźć wartości własne ψ

c) Znaleźć bazy podprzestrzeni własnych ψ określonego w b). Czy istnieje baza $\mathbb{R}^3$ złożona z wektorów własnych ψ? Jeśli tak, to podać macierz endomorfizmu ψ w tej bazie.

2. Niech macierz $A = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

a) Uzasadnić, że A jest diagonalizowalna, oraz wskazać taką macierz $C \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, że macierz $C^{-1}AC$ jest diagonalna

b) Podać wzór na A^n dla $n = 1, 2, \ldots$

3. a) Niech $v_1 = (1, -1, -1, -1), v_2 = (-2, 3, 4, 3), v_3 = (1, 0, 0, 0)$, wektory $\mathbb{R}^4$. Zastosować do układu złożonego z v_1, v_2, v_3 proces ortogonalizacji Grama–Schmidta, a następnie unormować tak otrzymaną bazę $lin(v_1, v_2, v_3)$.

b) Niech $V = lin(v_1, v_2)$, gdzie v_1, v_2 określone w a), zaś $w = (0, 0, 1, 0)$. Obliczyć rzut otogonalny $P_V(w)$ wektora w na podprzestrzeń $V \subset \mathbb{R}^4$,

c) Niech podprzestrzeń $V \subset \mathbb{R}^4$ i wektor w, takie jak w b). Obliczyć $S_V(w)$ – obraz wektora w w symetrii względem podprzestrzeni $V \subset \mathbb{R}^4$.