3. Kolokwium z algebry, uzupełniające zadania przygotowawcze.

19 grudnia 2014

Zadanie 1. Zadano następujący układ równań U zależny od parametrów $s, t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + tx_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 = s \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 5 \end{cases}$$

a) Określić, dla jakich wartości $s, t \in \mathbb{R}$ układ U jest niesprzeczny

b) dla jakich wartości $s, t \in \mathbb{R}$ układ U ma dokładnie jedno rozwiązanie.

Najpierw odpowiemy na b). Na mocy twierdzenia Cramera układ 3 równań z 3 niewiadomymi ma dokładnie jedno rozwiązanie$\Leftrightarrow$ kiedy macierz współczynników jest odwracalna, tzn. kiedy jej wyznacznik jest $\neq 0$, czyli

$$\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & t \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 4 + 4t \neq 0 \Leftrightarrow t \neq -1$$

Aby odpowiedzieć na a) możemy ograniczyć się do $t = -1$. Z twierdzenia Kroneckera - Capelliego wiemy, że układ jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, kiedy rząd macierzy współczynników jest równy rzędowi macierzy układu. Dla $t = 1$ macierzą współczynników układu jest $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Jej rząd wynosi 2, gdyż zawiera podmacierz 2×2 o wyznaczniku $\neq 0$ powstałą przez usunięcie 3 wiersza i 3 kolumny, tj. $A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ zaś wyznacznik A jest 0. Macierzą układu jest $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & s \\ 1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$. Rząd macierzy jest równy stopniowi maksymalnej podmacierzy kwadratowej o wyznaczniku $\neq 0$. M zawiera podmacierz A', a więc jej rząd jest co najmniej 2. Podmacierz A' możemy w M powiększyć na dwa sposoby do podmacierzy stopnia 3: albo do A (ale $\det A = 0$), albo do $N = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & s \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$. Wyznacznik $\det N = 21 - 3s \neq 0 \Leftrightarrow s \neq 7$. Zatem rząd M jest różny od rzędu A tylko dla $s \neq 7$. Czyli układ jest sprzeczny tylko wtedy kiedy $t = -1$ zaś $s \neq 7$ (inaczej mówiąc jest niesprzeczny dla $t \neq -1$ lub $s = 7$).

Zadanie 2. Rozważmy macierze $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ oraz zależną od parametru $u \in \mathbb{R}$ macierz $A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & u \end{bmatrix}$. Dla jakiej wartości u macierze A_1 i A_2 są podobne? Dla tej wartości u znaleźć taką macierz C odwracalną, że $A_2 = C^{-1}A_1C$.

Odp. Macierze podobne mają te same wielomiany charakterystyczne, a więc i te same wartości własne (pierwiastki) i o tych samych krotnościach. Ponieważ wartości własne A_1 to 2 i 3, zaś wartości własne A_2 to 3 i u zatem musi być $u = 2$. Z drugiej strony jeśli A_1 i A_2 mają wartości własne 2 i 3 to obie są podobne do macierzy diagonalnej $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, a zatem są również wzajemnie podobne. Aby znaleźć C rozważmy takie macierze odwracalne C_1 i C_2, że $D = C_1^{-1}A_1C_1$ oraz $D = C_2^{-1}A_2C_2$. Wtedy mamy:

$C_2^{-1}A_2C_2 = C_1^{-1}A_1C_1$ czyli $A_2 = C_2C_1^{-1}A_1C_1C_2^{-1}$. Zatem jeśli przyjmiemy $C = C_1C_2^{-1}$ to $C^{-1} = (C_1C_2^{-1})^{-1} = (C_2^{-1})^{-1}C_1^{-1} = C_2C_1^{-1}$ (proszę sobie przypomnieć regułę znajdowania macierzy odwrotnej do iloczynu macierzy) czyli $A_2 = C^{-1}A_1C$.